publicação do departamento de matemática
da universidade do minho

publicado pelo departamento de matemática
da universidade do minho
campus de gualtar, 4710-054
braga, portugal

primeira edição, maio 2007

ISBN

número 16

análise complexa

maria joana soares

Conteúdo

Prefácio

Estes textos foram escritos para servir de apoio ao estudo da disciplina semestral de *Análise Complexa* leccionada no terceiro ano da actual Licenciatura em Matemática da Universidade do Minho, a qual será também uma disciplina constante do plano de estudos do futuro Primeiro Ciclo em Matemática desta Universidade.

Os tópicos abordados, constantes do programa desta disciplina, são os que classicamente fazem parte de qualquer curso introdutório de Análise Complexa: noções básicas de números complexos e de funções de variável complexa (limites, continuidade, diferenciabilidade); séries de potências; funções elementares; integração e Teorema de Cauchy; séries de Laurent e resíduos.

Ao longo do texto são, por vezes, fornecidos exemplos do modo como o aluno poderá utilizar o *Mathematica* para resolver alguns exercícios e visualizar graficamente as suas respostas. Não é nossa intenção fazer uma utilização sistemática do *Mathematica*, nem temos a ousadia de propor a utilização deste sistema para reformular por completo a abordagem tradicional do ensino desta disciplina. O nosso principal objectivo é, somente, incentivar o aluno a recorrer, sempre que tal seja útil, a esta poderosa ferramenta (com a qual, nesta altura do seu curso, deverá estar já familiarizado!), continuando a explorar as suas potencialidades, agora como auxiliar da apreensão dos conceitos e técnicas da Análise Complexa. Na escrita dos exemplos de utilização do *Mathematica* fomos fortemente influenciados pelo recente livro de William T. Shaw [Sha06].

Outras referências bibliográficas a que recorremos para a escrita destes textos foram: [BN96],[CB84],[Con91],[Gam00], [GL74],[Lan93],[MH87], [MH01],[Nah98],[Nee97], [Pri90], [SS93] e [ST85].

Finalmente, referimos que todas as notas biográficas de matemáticos, apresentadas em nota de rodapé, são tradução das curtas biografias disponíveis em: MacTutor History of Mathematics Archive, cujo endereço electrónico é: `www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/`.

1. Números complexos

The imaginary number is a fine and wonderful resource of the human spirit,
almost an amphibian between being and not being.

G. W. Leibniz

cit. em A L Mackay, "Dictionary of Scientific Quotations" (Londres 1994)

1.1 Um pouco de história

O aparecimento dos chamados números complexos – números da forma $a + b\sqrt{-1}$ com a e b números reais – data do séc. XVI, e é geralmente atribuído a Girolamo Cardano.[1] Na sua obra *Artis Magnæ* (geralmente referida como *Ars Magna*), datada de 1545, Cardano considera equações quadráticas que, tais como a equação

$$x^2 + 2x + 2 = 0,$$

por exemplo, não admitem soluções reais. A fórmula resolvente dá expressões "formais" para as duas soluções dessa equação, mas envolve raízes de números negativos:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{-1}.$$

Embora tais números surjam, de facto, na referida obra de Cardano, ele próprio se apressa a desvalorizá-los, referindo-se-lhes como "*tão subtis quanto inúteis*". De facto, para Cardano, tal como para os restantes matemáticos do seu tempo, com uma concepção da matemática ainda herdada dos Gregos, o que interessava eram, essencialmente, os problemas

[1] Girolamo Cardan ou Cardano (1501–1576), médico e matemático italiano, famoso pelo seu trabalho Ars Magna, que foi o primeiro tratado em latim dedicado exclusivamente à Álgebra. Nele, apresentou métodos de resolução das equações cúbicas e quárticas que tinha aprendido com Tartaglia.

geométricos; nesse sentido, uma equação tal como a equação anterior, não tinha interesse por si própria, surgindo associada, por exemplo, ao problema geométrico da determinação da intersecção da parábola $y = x^2$ com a recta de equação $y = -2x - 2$, problema esse sem solução.

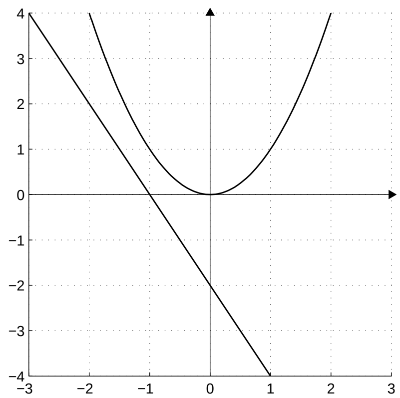


Figura 1.1: Interpretação geométrica da equação $x^2 = -2x - 2$

Em 1572, Rafael Bombelli[2], discípulo de Cardano, lida, no seu livro *Algebra*, com a resolução de equações cúbicas do tipo

$$x^3 = 3px + 2q$$

pela aplicação da chamada fórmula de Cardano: [3]

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Ao aplicar tal fórmula à resolução da equação

$$x^3 = 15x + 4$$

[2]Rafael Bombelli (1526 - 1572) foi um matemático italiano que escreveu um influente texto de Álgebra e fez uso frequente quer de números negativos quer de números complexos.

[3]Também conhecida por Fórmula de Tartaglia (1550 - 1557) e atribuída também a Scipione del Ferro (1465 - 1526); sobre a famosa polémica entre Cardano e Trataglia acerca da publicação dessa fórmula, veja, e.g `www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Tartaglia versus Cardan`.

(que corresponde, geometricamente, a determinar a intersecção da cúbica $y = x^3$ com a recta de equação $y = 15x + 4$; veja Fig.1.2) obtém como solução

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}},$$

isto é, uma expressão envolvendo raízes de números negativos.[4] Neste caso, no entanto, Bombelli sabe (por inspecção) existir solução real $x = 4$ para o problema, o que parece, portanto, ser paradoxal. É, então, que lhe surge a ideia que, ele próprio, considera de "louca": E se $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$ for da forma $2 + n\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$ da forma $2 - n\sqrt{-1}$, de modo que, ao somar, se obtenha, de facto $x = 4$? Admitindo que tal é verdade, elevando formalmente ao cubo cada uma dessas expressões (usando $(\sqrt{-1})^2 = 1$) e igualando, respectivamente, a $2 + 11\sqrt{-1}$ e $2 + 11\sqrt{-1}$, obtém que

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} \qquad \text{e} \qquad \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

ou seja, vem $n = 1$!

Como facilmente se entende, Bombelli não aceita ainda os números complexos como números de pleno direito, continuando a considerá-los misteriosos; no entanto, é ele o primeiro a escrever explicitamente as regras para a adição, subtracção e multiplicação de números complexos e a mostrar como, usando esse tipo de números com essa aritmética, é possível obter soluções reais para a cúbica, quando se usa a fórmula de Cardano-Tartaglia. É também ele que introduz uma notação própria para $\sqrt{-1}$, chamando-lhe "*piú di meno*".

À medida que se desenvolvem outras manipulações com números complexos e são introduzidas funções complexas de variável complexa, vai-se tornando clara a sua utilidade e descobrindo como a sua utilização pode contribuir significativamente para a simplificação de muitos problemas. Apesar disso, durante quase três séculos, estes números vão sendo usados, mas não são nunca considerados números verdadeiramente "legítimos". Em 1637, no sua obra *La Géométrie* (contida no *Discours de la Méthode*), Descartes[5] faz a distinção

---

[4] De facto, esta equação tinha surgido já a Cardano, mas ele não prosseguiu o seu estudo, deixando-o ao cuidado do seu discípulo Bombelli.

[5] René Descartes (1596 - 1650) filósofo francês cuja obra, La Géométrie, inclui a sua aplicação da Álgebra à Geometria, à qual devemos hoje a Geometria Analítica. O seu trabalho exerceu grande influência, quer em matemáticos, quer em filósofos.

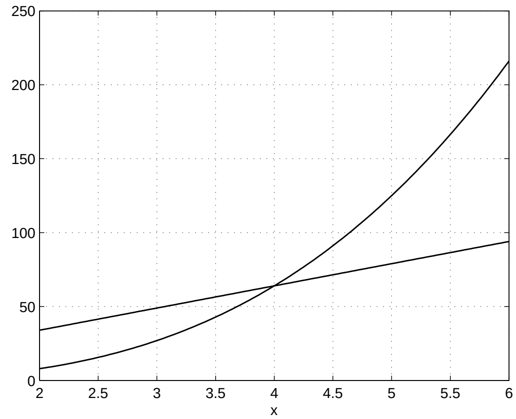


Figura 1.2: Raiz positiva da equação $x^3 = 15x + 4$

entre números "reais"e números "imaginários"(ou que existem apenas na imaginação), interpretando a ocorrência de soluções imaginárias para um certo problema como um sinal de que o problema em causa não tem solução geométrica. Esta opinião é, um século mais tarde, ainda compartilhada por Euler, apesar de este matemático ter contribuído de forma significativa para o desenvolvimento da teoria das funções complexas. [6]

De facto, os números complexos só começam a ser aceites como números de "pleno direito" em pleno séc. XIX, quando surge a ideia de os identificar com pontos do plano. [7] Em 1797, o norueguês Caspar Wessel (1745-1818) apresenta à Real Academia de Ciências Dinamarquesa um artigo intitulado "*Om Direktionens analytiske Betegning*" ("*Sobre a Representação Analítica de Direcção*"), no qual descreve pormenorizadamente a representação geométrica de números complexos. Tal artigo é publicado (em dinamarquês) nas Memórias da referida Academia, em 1799, mas permanece totalmente desconhecido até à sua tradução

[6]Leonhard Euler foi um matemático suíço que fez enormes contribuições em diversas áreas da matemática e da física, incluindo geometria analítica, trigonometria, geometria, cálculo e teoria de números. A título de curiosidade, refira-se que é a Euler que se deve a introdução, em 1777, do símbolo i para denotar $\sqrt{-1}$.

[7]Uma tentativa de associar números complexo a pontos do plano já tinha sido apresentada por John Wallis (1616-1713), mas as suas ideias, sendo bastante confusas, não exerceram qualquer influência sobre os seus contemporâneos; deve também referir-se que a representação geométrica de Wallis não era completamente satisfatória.

para francês, cerca de cem anos mais tarde. Entretanto, a ideia é atribuída ao suíço Jean Argand[8], que a apresenta, independentemente, em 1806. Desde aí, a representação geométrica dos números complexos, é conhecida vulgarmente por *diagrama de Argand*. É, no entanto, apenas com a publicação em 1831 de um trabalho de Gauss,[9] no qual é feito um estudo pormenorizado da representação geométrica dos números complexos,[10] que estes números começam a ganhar uma certa respeitabilidade, e se aceita que, de facto, não há nada de "imaginário" acerca deles. É a Gauss que se deve também a introdução da designação "números complexos".

Finalmente, em 1837, quase três séculos depois do seu aparecimento com Cardano, Hamilton[11] publica a definição formal e completa do sistema de números complexos, como conjunto de pares ordenados de números reais com duas operações (uma adição e uma multiplicação) bem definidas.

Uma vez aceites totalmente estes números, a análise complexa, ou seja, o estudo das funções complexas de variável complexa, desenvolveu-se de uma forma extremamente rápida no séc. XIX, essencialmente devido aos trabalhos de Cauchy.[12] Ainda durante este século, esta teoria vai ser aprofundada e alargada, com matemáticos tais como Dirichlet, [13] Wei-

[8]Jean Robert Argand, nasceu em Geneva em 1768 e morreu em Paris, no ano de 1822. Argand é famoso pela sua interpretação geométrica de números complexos onde i é interpretado como uma rotação de 90^o.

[9]Johann Carl Friedrich Gauss nasceu em Brunswick em 1777 e faleceu em 1855 em Göttingen. Gauss trabalhou em variados campos, quer em matemática, quer em física, incluindo teoria de números, análise, geometria diferencial, geodesia, magnetismo, astronomia e óptica. O seu trabalho teve enorme influência em muitas áreas.

[10]De referir que, numa carta enviada a Bessel em 1811, Gauss refere já a identificação de números complexos como pontos do plano, comentando mais tarde:"Durante muitos anos considerei esta parte altamente importante da Matemática sob um ponto de vista diferente, onde às quantias imaginárias pode ser dada uma existência tão objectiva quanto às quantias negativas, mas até hoje não tive oportunidade de publicar meus pensamentos."

[11]Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865), matemático irlandês. Em 1843 Hamilton descobre os quaterniões, a primeira álgebra não comutativa a ser estudada. Sentiu que esta descoberta iria revolucionar a física-matemática e passou o resto da sua vida a trabalhar nos quaterniões.

[12]Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857), matemático francês. Cauchy foi pioneiro no estudo da análise, quer real quer complexa e na teoria de permutação de grupos. Investigou também a convergência e divergência de séries, equações diferenciais, determinantes, probabilidades e física-matemática.

[13]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), matemático alemão. Dirichlet provou, em 1826 que, em qualquer progressão aritmética cujo primeiro termo seja primo da diferença, existem infinitos

erstrass [14] e Riemann.[15] No séc. XX muitos matemáticos continuaram a dedicar-se a esta fascinante área da matemática, obtendo importantes desenvolvimentos e novas aplicações.

1.2 Corpo dos números complexos

Definamos, no conjunto $\mathbb{R}^2$ de todos os pares ordenados de números reais, duas operações binárias – uma adição (denotada pelo símbolo $+$) e uma multiplicação (denotada pelo símbolo $\cdot$ ou, por vezes, simplesmente por justaposição) – do seguinte modo:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1.1}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2) \tag{1.2}$$

Note-se que a adição aqui definida é a adição usual do espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$, pelo que, como sabemos, goza das propriedades comutativa e associativa; além disso, existe elemento neutro para esta operação (o par $(0, 0)$) e todo o par (x, y) tem inverso (como habitualmente, designado por simétrico): o par $(-x, -y)$.

Quanto à multiplicação, facilmente se mostra que, também ela, é comutativa e associativa, que existe elemento neutro (ou identidade) para esta operação (o par $(1, 0)$) e que todo o elemento $(x, y) \neq (0, 0)$ tem um inverso, dado por $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$. Finalmente, a multiplicação é distributiva em relação à adição.

As propriedades acima mencionadas permitem-nos, portanto, afirmar que o conjunto $\mathbb{R}^2$, munido das operações de adição e de multiplicação definidas por (1.1) e (1.2), constitui um corpo. Este corpo é usualmente denotado por $\mathbb{C}$, sendo os seus elementos designados por *números complexos*.

Considere-se agora a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & (x, 0), \end{array}$$

números primos.

[14] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897), matemático alemão. Weierstrass é mais conhecido pela sua construção da teoria de funções complexas por meio de séries de potências.

[15] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), matemático alemão. As ideias de Riemann sobre geometria do espaço tiveram um profundo impacto no desenvolvimento da moderna física teórica. Ele clarificou a noção de integral, definindo aquele que é hoje conhecido como *integral de Riemann*.

e note-se que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, se tem

$$\varphi(x+y) = (x+y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

e

$$\varphi(xy) = (xy, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Além disso, a aplicação anterior é, como é fácil de mostrar, injectiva. Concluímos, assim, que φ é um monomorfismo do corpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ no corpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Assim sendo, φ estabelece um isomorfismo entre o corpo $\mathbb{R}$ e o sub-corpo de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ que é a imagem por φ de $\mathbb{R}$, isto é, o corpo $\{(x, y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$. É, assim, natural identificar o conjunto dos complexos (x, y) tais que $y = 0$ com o conjunto $\mathbb{R}$ e denotar simplesmente por x o número complexo $(x, 0)$.

Notações básicas

É usual denotar o complexo $(0, 1)$ pelo símbolo i.[16] Com esta nova notação, e tendo em conta a identificação anterior dos complexos da forma $(x, 0)$ com os correspondentes números reais x, tem-se

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0).(1, 0) + (0, y).(0, 1) = x.1 + y \cdot i = x + yi.$$

Assim, todo o número complexo (x, y) pode também ser designado por $x + yi$, sendo esta a notação mais vulgarmente utilizada para números complexos – e aquela que passaremos a adoptar neste curso.

É, então, imediato reconhecer que (denotando por z^2 o complexo $z \cdot z$) se tem

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1. \tag{1.3}$$

Com a notação $x + yi$, as definições da adição (1.1) e da multiplicação (1.2) podem ser "lidas" como

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i && (1.4) \\ (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i && (1.5) \end{aligned}$$

[16] Como já referimos, a introdução deste símbolo deve-se a Euler; de notar que, por vezes, especialmente em Engenharia, é utilizado o símbolo j para denotar este número complexo.

Nota: As fórmulas anteriores são muito simples de fixar: basta tratar os complexos como polinómios lineares em i, usar as operações usuais de polinómios e substituir i^2 por -1.

Definição 1.1. *Dado um número complexo $z = x + yi$:*

- *chamamos a x a* **parte real** *de z e a y a* **parte imaginária** *de z, e escrevemos*

$$\operatorname{Re} z := x \qquad\qquad \operatorname{Im} z := y; \tag{1.6}$$

- *chamamos* **módulo** *ou* **valor absoluto** *de z e denotamos por $|z|$ o número (real não negativo) dado por*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}; \tag{1.7}$$

- *chamamos* **conjugado** *de z e denotamos po $\bar{z}$ o número complexo*

$$\bar{z} := x - yi. \tag{1.8}$$

Como habitualmente, usaremos as seguintes notações:

- $z - w$ para designar a soma de z com o simétrico de w, i.e. $z - w := z + (-w)$;
- $\frac{1}{w}$ para denotar o inverso de w $(w \neq 0)$;
- $\frac{z}{w}$ para denotar o produto do complexo z pelo complexo $\frac{1}{w}$ $(w \neq 0)$.

A tabela seguinte contém uma lista das principais propriedades do módulo, conjugado, parte real e parte imaginária de um complexo; a demonstração destas propriedades é deixada ao cuidado dos alunos.

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$	$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
$\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$	$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ $(w \neq 0)$
$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$	$\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
$\bar{\bar{z}} = z$	$\|z\| = \|\bar{z}\|$
$\|z \cdot w\| = \|z\|\|w\|$	$z \cdot \bar{z} = \|z\|^2$
$\|z \pm w\| \leq \|z\| + \|w\|$	$\|z \pm w\| \geq \|\|z\| - \|w\|\|$
$\|\mathrm{Re}\, z\| \leq \|z\|$	$\|\mathrm{Im}\, z\| \leq \|z\|$
$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$ $(z \neq 0)$	$\left\|\frac{z}{w}\right\| = \frac{\|z\|}{\|w\|}$ $(w \neq 0)$.

Tabela 1.1: Propriedades do módulo, parte real, parte imaginária e conjugado de complexos.

Nota: É importante salientar que, na tabela anterior, todas as desigualdades são estabelecidas entre **números reais** ($|z|, |\mathrm{Re}\, z|$, etc.).

De facto, contrariamente ao corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, o corpo $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado.

Relembre que um corpo $(K, +, \cdot)$ se diz ordenado se existir um seu subconjunto K^+ (dos elementos ditos *positivos*) com as seguintes propriedades: (i) a soma e o produto de elementos positivos é um elemento positivo, i.e. sendo $x, y \in K^+$, então $x + y \in K^+$ e $x.y \in K^+$; (ii) dado $x \in K$, verifica-se sempre uma e uma só das seguintes hipóteses: ou $x = 0$, ou x é positivo ou $-x$ é positivo (caso em que se diz que x é *negativo*). Num corpo ordenado K, tem-se sempre que, se $x \in K, x \neq 0$, então $x^2 = x.x = (-x).(-x) \in K^+$. Em particular, designando por 1 a identidade do corpo, ter-se-á $1 = 1.1 \in K^+$, pelo que -1 nunca pertence a K^+.

É então imediato concluir que $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado, pois, por uma lado, ter-se-ia $i^2 = i.i \in \mathbb{C}^+$ e, por outro lado, seria $i^2 = -1 \notin \mathbb{C}^+$.

Assim sendo, ao longo deste curso, quaisquer desigualdades apresentadas (por exemplo, $\delta > 0$, $\epsilon > 0$) serão sempre entendidas entre **números reais!**

Exemplo 1.1. *Vejamos exemplos muito simples da utilização do Mathematica para determinar o módulo, o conjugado, o inverso, a parte real e a parte imaginária de complexos. Leia cuidadosamente os exemplos e obtenha ajuda do Mathematica sobre os comandos aí utilizados:* `Abs`, `Re`, `Im`, `Conjugate`, `ComplexExpand`.

```
z = 3 + 2 i;
Print["z =  ", z]
Print["|z| =  ", Abs[z]]
Print["z̄ =  ", Conjugate[z]]
Print["Re(z) =  ", Re[z]]
Print["Im(z)=  ", Im[z]]
```

```
z =  3 + 2 i
|z| =  √13
z =  3 - 2 i
Re(z) =  3
Im(z)=  2
```

```
z1 = x1 + y1 i;
z2 = x2 + y2 i;
modProd = ComplexExpand[Abs[z1 z2]];
prodMod = ComplexExpand[Abs[z1] Abs[z2]];
Print["|z1 z2|= ", modProd];
Print["Será verdade que |z1 z2|= |z1| |z2| ? ",
  modProd == prodMod];
```

$|z_1\ z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

Será verdade que $|z_1\ z_2| = |z_1|\ |z_2|$? True

```
z = x + y ⅈ;
invz = ComplexExpand[1 / z];
num = ComplexExpand[Conjugate[z]];
den = ComplexExpand[Abs[z]]^2;
invzf2 = ComplexExpand[num / den];

Print["1/(x + y ⅈ) = ", invz]
Print["É verdade que 1/z = z̄/|z|^2 ? ", invz == invzf2];
```

$$\frac{1}{x + y\,i} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{i\,y}{x^2 + y^2}$$

É verdade que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$? True

1.3 Plano complexo

Fixado um referencial cartesiano num plano, a cada número complexo $z = x + iy$ poderá associar-se, de modo único, o ponto de coordenadas $(x, y) = (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ desse plano (ou, se preferirmos, o vector que une a origem de coordenadas a esse ponto). Estabelece-se, assim, uma bijecção entre o conjunto dos números complexos e o conjunto dos pontos do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Os números reais (ou seja, os complexos de parte imaginária nula) correspondem ao eixo dos xx, o qual é, neste contexto, vulgarmente designado por *eixo real*; de modo análogo, os complexos da forma iy (isto é, os complexos de parte real nula) – chamados *imaginários puros* – correspondem ao eixo dos yy, o qual costuma ser designado por *eixo imaginário*. Quando o plano xy é utilizado, deste modo, para a representação de números complexos, é usual chamar-lhe *plano complexo* ou *plano de Argand* ; ver Fig. 1.3. Muitas vezes, identificamos completamente o conjunto $\mathbb{C}$ com este plano e referimo-nos a $\mathbb{C}$ como o *plano complexo*, falando também no *ponto* $z = x + iy$, etc.

A adição de números complexos é, como já referimos, a adição usual do espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$. Assim sendo, como sabemos, a adição de dois números complexos pode ser obtida

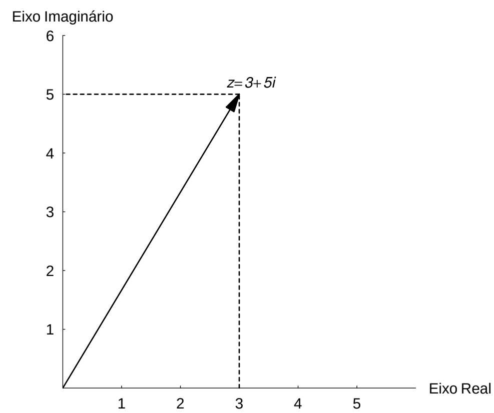


Figura 1.3: Representação geométrica de complexos

geometricamente pela chamada *regra do paralelogramo*: dados z e w em $\mathbb{C}$, se desenharmos os vectores que unem z e w à origem O, estes formam dois lados de um paralelogramo com O, z e w como três vértices; o quarto vértice do paralelogramo é precisamente $z + w$; ver Fig. 1.4.

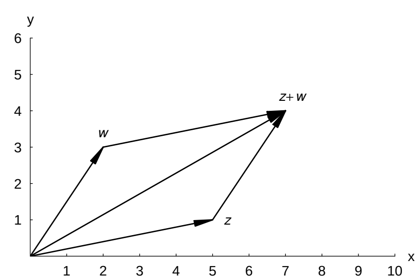


Figura 1.4: Adição de complexos

Note-se também que, dados $z = x + iy$ e $w = u + iv$, $|z - w| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$ nos dá a distância (Euclidiana) entre os pontos z e w. Em particular, $|z|$ é a distância do ponto z à origem. Além disso, dado $z = x + yi$, o seu conjugado $\bar{z} = x - yi$ é obtido geometricamente reflectindo z relativamente ao eixo dos xx e o seu simétrico $-z = -x - iy$

reflectindo em relação à origem; ver Fig. 3.2.

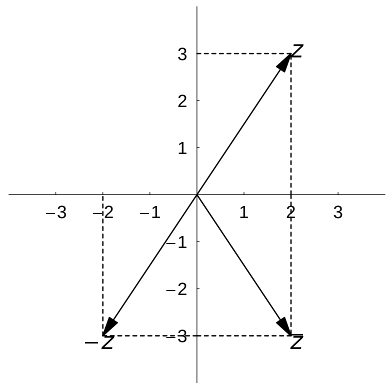


Figura 1.5: Representação geométrica de $\bar{z}$ e de $-z$

Subconjuntos do plano complexo

É importante conseguir identificar geometricamente subconjuntos do plano definidos por condições em termos de números complexos. Por exemplo, é imediato reconhecer que o conjunto de pontos $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 3\}$ é uma circunferência de centro no ponto 1 (ou, se preferirmos, no ponto de coordenadas $(0,1)$) e de raio 3, já que $|z-1|$ é a distância entre os pontos z e 1. Naturalmente, escrevendo $z = x + iy$, tem-se

$$|z-1| = 3 \iff |z-1|^2 = 9 \iff (x-1)^2 + y^2 = 9,$$

sendo facilmente identificável a equação da referida circunferência.

Na identificação de regiões do plano definidas por condições e sua representação geométrica, pode ser útil utilizar alguns seguintes dos comandos do *Mathematica*: `InequalityPlot`, `ComplexInequalityPlot` (que se encontram no pacote `InequalityGraphics`) e `InequalitySolve` (do pacote `InequalitySolve`).

Exemplo 1.2. *Identifique a região do plano definida pela condição* $\mathrm{Im}(z+i) \geq |z-i|$ *e represente-a geometricamente.*

```
z = x + y ⅈ;
ladoEsq = ComplexExpand[Im[z + ⅈ]]
ladoDir = ComplexExpand[Abs[z - ⅈ]]
Solve[ladoEsq == ladoDir, y]
```

$1 + y$

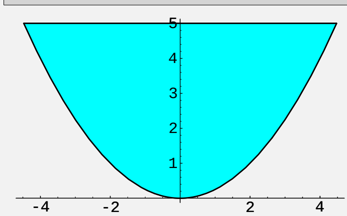
$\sqrt{x^2 + (-1+y)^2}$

$\{\{y \to \frac{x^2}{4}\}\}$

Assim, verificamos que a curva definida por $\mathrm{Im}(z+i) = |z-i|$ *é a parábola de equação* $y = \frac{x^2}{4}$.

A região definida por $\mathrm{Im}(z+i) \geq |z-i|$ *é, então, a região sombreada na figura seguinte, a qual pode ser esboçada directamente usando o Mathematica.*

```
<< Graphics`InequalityGraphics`
ComplexInequalityPlot[Im[z + ⅈ] ≥ Abs[z - ⅈ], {z, -5 - 5 ⅈ, 5 + 5 ⅈ}];
```



Recorde a definição da parábola como o conjunto de pontos equidistante de uma recta fixa (directriz) e de um certo ponto fixo (foco) e pense no que representa $\mathrm{Im}(z+i)$ e $|z-i|$; conclua, então, que a equação em causa representa a parábola cuja directriz é a recta $x = -1$ e cujo foco é o ponto $(0,1)$ e relembre que a equação dessa parábola é, efectivamente, $y = \frac{x^2}{4}$.

1.4 Representação polar e raízes de números complexos

Sejam r e θ as coordenadas polares do ponto (x,y) que corresponde ao número complexo $z = x + yi$ $(z \neq 0)$; ver Fig. 1.6 .

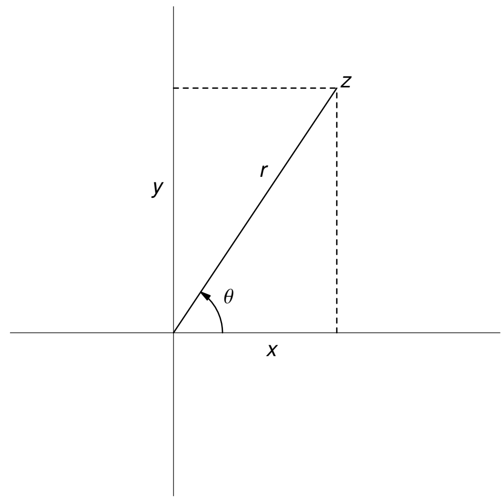


Figura 1.6: Representação polar de complexos

Então, temos

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \tag{1.9}$$

Segue-se que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|. \tag{1.10}$$

Qualquer número θ que satisfaça as equações (1.9) (com r dado por (1.10)), é chamado um argumento de $z = x + yi$.

Note-se que se θ é um argumento de z, também será um argumento de z qualquer número da forma $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (e apenas os números dessa forma serão argumentos de z). Para $z = x + iy$ ($z \neq 0$), o conjunto de todos os possíveis argumentos de z é denotado por $\arg z$. Mais precisamente, tem-se a seguinte definição.

Definição 1.2. *Dado um complexo não nulo $z = x + iy$, e sendo $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, denotamos por* $\arg z$ *o conjunto*

$$\arg z := \{\theta : x = r\cos\theta, y = r\cos\theta\}. \tag{1.11}$$

Se $\theta \in \arg z$, dizemos que θ é **um argumento** *de z.*

Nota: Se θ é um argumento de z, temos

$$\arg z = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}; \tag{1.12}$$

por vezes, escrevemos a igualdade anterior apenas como

$$\arg z = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ao (único) argumento de $z = x + yi$ pertencente ao intervalo $(-\pi, \pi\ ]$, chamamos *argumento principal* de z. O argumento principal de z é denotado por $\operatorname{Arg} z$. Assim, tem-se

$$\operatorname{Arg} z = \theta \iff x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \ \text{ e } \ \theta \in (-\pi, \pi]. \tag{1.13}$$

Dado um complexo $z = x + iy$, sendo r o seu módulo e θ um seu argumento, temos

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta \\ &= r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta). \end{aligned} \tag{1.14}$$

À representação de z na forma (1.14) chamaremos *forma polar* do complexo z. Por comodidade de linguagem, usaremos a seguinte notação

$$\boxed{\operatorname{cis}\theta := \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{1.15}$$

Com esta notação, a representação polar de z escrever-se-á simplesmente como

$$z = r\operatorname{cis}\theta. \tag{1.16}$$

Exemplo 1.3. *Ilustremos a conversão, com o Mathematica, de complexos dados na forma $a + bi$ para a forma polar e vice-versa.*

```
z = -√3 - i;
r = Abs[z];
θ = Arg[z];
Print[" z = ",
  r, " cis(", θ, ")"]
```

z = 2 cis($-\frac{5\pi}{6}$)

```
r = 8;
θ = (7 π) / 3;
z = Simplify[r * (Cos[θ] + ⅈ Sin[θ])];
Print["z = ", z]
```

z = $4 + 4 \, i \sqrt{3}$

Forma polar do produto

Sejam $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = \operatorname{cis} \theta_2$ dois complexos dados (não nulos). Então,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \operatorname{cis} \theta_1 \ \operatorname{cis} \theta_2 \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= r_1 r_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Vemos assim que $\theta_1 + \theta_2 \in \arg(z_1 z_2)$; é, então, fácil de concluir que

$$\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2} \tag{1.18}$$

onde $\arg z_1 + \arg_2$ designa a soma dos conjuntos $\arg z_1$ e $\arg z_2$, i.e.

$$\arg z_1 + \arg z_2 := \{\alpha_1 + \alpha_2 : \alpha_1 \in \arg z_1, \alpha_2 \in \arg z_2\}.$$

Mostremos primeiramente que $\arg(z_1 z_2) \subseteq \arg z_1 + \arg z_2$. Seja, então, $\theta \in \arg(z_1 z_2)$; uma vez que $\theta_1 + \theta_2$ é um dos argumentos de $z_1 z_2$, ter-se-á (ver (**??**)).

$$\theta = (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi = \theta_1 + (\theta_2 + 2k\pi), \text{ para um certo } k \in \mathbb{Z},$$

o que mostra que $\theta \in \arg(z_1) + \arg(z_2)$ e estabelece, portanto, a inclusão pretendida.

Mostremos agora que $\arg(z_1) + \arg(z_2) \subseteq \arg(z_1 z_2)$. Seja $\alpha \in \arg(z_1) + \arg(z_2)$, isto é, seja $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ com $\alpha_1 \in \arg z_1$ e $\alpha_2 \in \arg z_2$; como, por hipótese, $\theta_1 \in \arg z_1$ e $\theta_2 \in \arg z_2$, ter-se-á (de novo, de acordo com (**??**)), $\alpha_1 = \theta_1 + 2k_1\pi$ (para um certo valor de $k_1 \in \mathbb{Z}$) e $\alpha_2 = \theta_2 + 2k_2\pi$ (para um determinado $k_2 \in \mathbb{Z}$); então, será

$$\alpha = \theta_1 + 2k_1\pi + \theta_2 + 2k_2\pi = (\theta_1 + \theta_2) + 2(k_1 + k_2)\pi,$$

o que, tal como se pretendia, mostra que $\alpha \in \arg(z_1 z_2)$. $\square$

O resultado anterior pode ser generalizado, mostrando-se facilmente, por indução que, se $z_k = \operatorname{cis}\theta_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, então

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \tag{1.19}$$

Potência (de expoente inteiro) de um complexo

Para $n \in \mathbb{N}_0$, define-se a potência n de um dado complexo z, recursivamente, do modo usual:

$$\left.\begin{array}{l} z^0 = 1 \\ \text{Para } n \geq 1, \quad z^n = z.z^{n-1} \end{array}\right\} \tag{1.20}$$

Além disso, se $z \neq 0$, z^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, deverá ser entendido com o significado $(z^{-1})^n$, isto é, como designando a potência n do inverso de z.

Da definição de potência e do resultado (1.19), é imediato concluir-se que, se $z = r \operatorname{cis}\theta$, então, para qualquer número natural n, tem-se

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta). \tag{1.21}$$

Além disso, se $z = r \operatorname{cis}\theta \neq 0$, temos

$$z[r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)] = 1$$

isto é,

$$z^{-1} = r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta) \tag{1.22}$$

Então,

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)\right)^n = r^{-n} \operatorname{cis}(-n\theta).$$

Vemos, assim, que, se $z \neq 0$, a fórmula (1.21) é válida para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, e não apenas para $n \in \mathbb{N}$. (Note-se que, se $z \neq 0$, a fórmula (1.21) é trivialmente verdadeira para $n = 0$.)

Como caso particular de (1.21) obtemos a chamada *fórmula de de Moivre*

$$\boxed{(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} \tag{1.23}$$

Raízes de índice n de um complexo

Consideremos agora as seguintes questões:

- Dado um número complexo $w \neq 0$ e um inteiro $n \in \mathbb{N}$, existirá sempre um complexo z tal que $z^n = w$?
- Se sim, quantos complexos distintos satisfazem a equação anterior?

A este propósito, introduzamos a seguinte definição.

Definição 1.3. *Dado um número complexo $w \neq 0$, a qualquer número complexo z tal que $z^n = w$ ($n \in \mathbb{N}$) chamaremos* **raiz de índice** n *de* w.

O problema em causa é, então,o de saber se todo o complexo admite (e quantas) raízes de índice n.

Comecemos por notar que, das identidades (1.14) e (**??**), se deduz de imediato a seguinte condição para que dois complexos $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$ e $w = \rho\,\mathrm{cis}\,\phi$, escritos na forma polar, sejam iguais:

$$r\,\mathrm{cis}\,\theta = \rho\,\mathrm{cis}\,\phi \iff r = \rho \quad \text{e} \quad \theta = \phi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{1.24}$$

Seja então dado um complexo não nulo, escrito na sua forma polar, $w = \rho\,\mathrm{cis}\,\phi$ e procuremos determinar $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$ tal que $z^n = w$. Atendendo a (1.21), será $z^n = r^n\,\mathrm{cis}(n\theta)$, pelo que deveremos ter

$$r^n = \rho \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Atendendo à periodicidade das funções seno e co-seno, é fácil de concluir que bastará considerar $k = 0, 1, \ldots, n-1$ na expressão anterior, pois qualquer outro valor de $k \in \mathbb{Z}$ conduzirá a um dos números já calculados. Em resumo, cada um dos n números distintos

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1} \tag{1.25}$$

é uma raiz de índice n do complexo $w = \rho \operatorname{cis} \phi$, sendo estas (e apenas estas) todas as possíveis raízes de índice n de w.

Nota: Em (1.25), $\sqrt[n]{\rho}$ denota a n-ésima raiz positiva do número (real positivo) ρ.

Exemplo 1.4. *Usemos o Mathematica para calcular as oito raízes de índice* 8 *de* $w = 1$ *e esboçar o seu gráfico.*

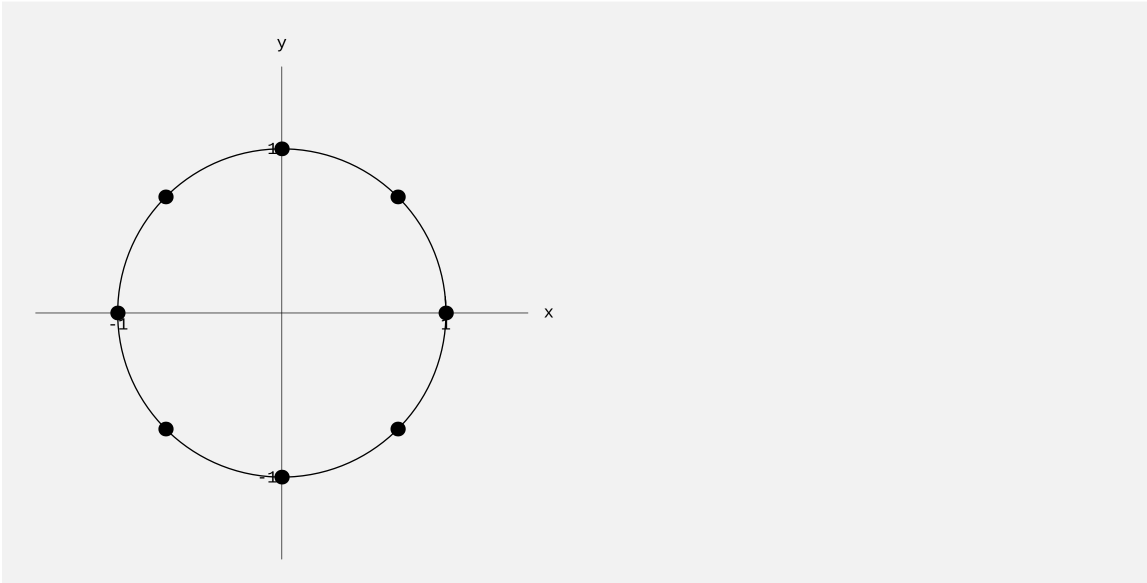
```
raizes = Solve[z^8 == 1 , z]
listaRaizes = z /. raizes
ComplexExpand[listaRaizes]
```

$\{\{z \to -1\}, \{z \to -i\}, \{z \to i\}, \{z \to 1\}, \{z \to -(-1)^{1/4}\}, \{z \to (-1)^{1/4}\}, \{z \to -(-1)^{3/4}\}, \{z \to (-1)^{3/4}\}\}$

$\{-1, -i, i, 1, -(-1)^{1/4}, (-1)^{1/4}, -(-1)^{3/4}, (-1)^{3/4}\}$

$\left\{-1, -i, i, 1, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, -\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}$

```
(* Esboço do gráfico das raízes *)
paresPontos =
  Table[{Re[listaRaizes][[k]], Im[listaRaizes][[k]]},
   {k, 1, Length[listaRaizes]}];
ListPlot[paresPontos, PlotStyle → PointSize[0.03],
  PlotRange → {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}},
  Ticks → {Range[-1, 1, 1], Range[-1, 1, 1]}, AspectRatio → 1,
  Axes → True,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  Epilog → Circle[{0, 0}, Abs[listaRaizes[[1]]]]];
```



1.5 Exercícios

Exercício 1.1. Determine o módulo e o conjugado de cada um dos seguintes complexos:

a) $-5+i$ *b)* $\dfrac{3+i}{\sqrt{2}+3i}$ *c)* $\dfrac{i}{3-i}$

d) i^{23} *e)* $(1+i)^5$.

Exercício 1.2. Sendo $z \in \mathbb{C}$, mostre que:

a) z é real sse $z = \bar{z}$; *b)* $\text{Re}(iz) = -\,\text{Im}\, z$.

Exercício 1.3. Sendo $z, v, w \in \mathbb{C}$, prove que:

a) $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\,\text{Re}(z.\overline{w}) + |w|^2$ *b)* $|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\text{Re}(z.\overline{w}) + |w|^2$

c) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ *d)* $|z+w| \leq |z| + |w|$

e) $|z-w| \leq |z-v| + |v-w|$ *f)* $||z| - |w|| \leq |z-w|$.

Exercício 1.4. Estabeleça condições necessárias e suficientes para que se verifique a igualdade nas alíneas *e)* e *f)* do exercício anterior.

Exercício 1.5. Escreva os seguintes complexos na forma polar:

a) $1-i$ *b)* $1-\sqrt{3}i$ *c)* $4+4i$ *d)* $(4+4i)^2$

e) $-5i$ *f)* $\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}$ *g)* $\left(\cos(\frac{1}{3}) - i\,\mathrm{sen}(\frac{1}{3})\right)^3$ *h)* $\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(\sqrt{3}-i)^2}$

Exercício 1.6. Escreva os seguintes complexos na forma $a+bi$:

a) $3\,\mathrm{cis}(\frac{5\pi}{6})$ *b)* $\frac{1+2i}{2+i}$ *c)* $(1+i)^3$ *d)* $(1+i)^{-3}$ *e)* $\frac{1}{(1-i)^2}$

Exercício 1.7. Identifique o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo que satisfazem cada uma das seguintes condições e esboce o gráfico correspondente.

a) $\mathrm{Re}\, z > 2$ *b)* $z = \bar{z}$ *c)* $1 \leq |z| \leq 3$

d) $|z|^2 > z + \bar{z}$ *e)* $|z-i| < |z+i|$ *f)* $z\bar{z} = 1$

g) $z + iz + 1 + i = 0$ *h)* $|z-1| - |z+1| = 1$ *i)* $|z^2 - 1| < 1$.

Nota: Para a resolução da alínea *i)* é conveniente fazer um pequeno estudo sobre a chamada *lemniscata de Bernoulli*.

Exercício 1.8. Determine e represente graficamente:

a) As raízes quartas da unidade.
b) As raízes cúbicas de $3-\sqrt{3}i$.
c) As raízes sextas de $1-i$.

Exercício 1.9. Use a fórmula de *de Moivre* para estabelecer as seguintes igualdades trigonométricas:

a)

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta.$$

b)

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.$$

Exercício 1.10. Resolva a equação

$$(z+1)^3 = z^3.$$

Exercício 1.11. Resolva a equação $|\operatorname{cis}\theta - 1| = 2 \quad (0 < \theta \leq \pi)$ e verifique a solução geometricamente.

Exercício 1.12. Estabeleça a identidade

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \neq 1)$$

e utilize-a para estabelecer a chamada *identidade trigonométrica de Lagrange*:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}, \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

Exercício 1.13. Mostre que, se w é uma raiz de índice n da unidade ($w \neq 1$), então :

$$1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 0.$$

2. Topologia elementar do plano complexo

The shortest path between two assertions about the reals passes through the complexes

J. Hadamard

cit. em *The Mathematical Intelligencer* **13** (1991).

2.1 Estrutura topológica de $\mathbb{C}$

Comecemos por relembrar que um **espaço métrico** é um par (X, d), onde X é um conjunto e d é uma aplicação de $X \times X$ em $\mathbb{R}$, satisfazendo:

(D1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y, \quad \forall x, y \in X$.

(D2) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$.

(D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X$.

Se (X, d) é um espaço métrico, dizemos que d é uma **métrica** ou **distância** em X.

Definição 2.1. *Sendo (X, d) um espaço métrico, $x_0 \in X$ e $r \in \mathbb{R}^+$, chama-se* **bola aberta** *de centro em x_0 e raio r, e denota-se por $B(x_0; r)$, o conjunto*

$$B(x_0; r) := \{x \in X \ : \ d(x_0, x) < r\}.$$

De modo análogo se define a **bola fechada** *de centro em x_0 e raio r (denotada por $\overline{B}(x_0; r)$):*

$$\overline{B}(x_0; r) := \{x \in X \ : \ d(x_0, x) \leq r\}.$$

Seja $X = \mathbb{C}$ e defina-se

$$d(z,w) = |z - w|, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Facilmente se verifica que $(\mathbb{C}, d)$ é um espaço métrico, ou seja, que a função $d : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por (2.1) satisfaz as propriedades (D1) – (D3) acima referidas. É precisamente a este espaço métrico que nos queremos referir quando falarmos no espaço métrico $\mathbb{C}$. Em particular, neste contexto, tem-se

$$B(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \tag{2.2}$$

e

$$\overline{B}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}. \tag{2.3}$$

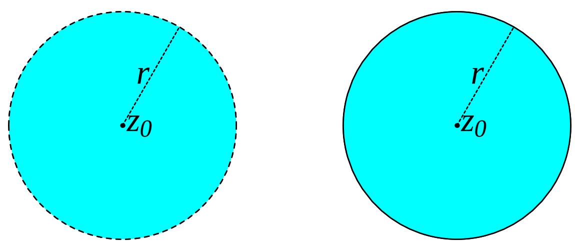


Figura 2.1: Bola aberta e bola fechada

Por vezes, é conveniente usar-se a chamada **bola perfurada** de centro no ponto z_0 e raio r, denotada por $B^*(x_0; r)$, e definida por

$$B^*(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\};$$

ver Fig. 2.2

Nota: No contexto da análise complexa é mais frequente o uso dos termos **disco aberto**, **disco fechado** e **disco perfurado** para designar, respectivamente, a bola aberta, bola fechada e bola perfurada, o que faremos frequentemente.

Se (X, d) é um espaço métrico e $\mathcal{T}_d$ é a família de partes de X tais que

$$A \in \mathcal{T}_d \Longleftrightarrow \forall x \in A \ \ \exists \epsilon > 0 \ : \ B(x; \epsilon) \subseteq A,$$

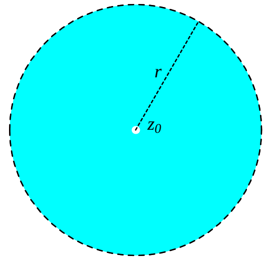


Figura 2.2: Bola perfurada

então $(X, \mathcal{T}_d)$ é um espaço topológico. [1] A $\mathcal{T}_d$ chama-se topologia induzida pela distância d.

Segue-se, então, que o espaço métrico $\mathbb{C}$ tem uma estrutura de espaço topológico. Quando, em $\mathbb{C}$, nos referirmos a conceitos topológicos tais como os de aberto, fechado, ponto interior, etc., tais conceitos devem ser entendidos relativamente à topologia induzida pela métrica (2.1). Em particular, temos as seguintes definições.

Definição 2.2. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{C}$ e seja $z_0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que:*

- z_0 *é* **ponto interior de** S *se e só se* $\exists \epsilon > 0 \ : \ B(z_0; \epsilon) \subseteq S$;
- z_0 *é* **ponto exterior de** S *se e só se* $\exists \epsilon > 0 \ : \ B(z_0; \epsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus S$;
- z_0 *é* **ponto aderente de S** *se e só se* $\forall \epsilon > 0 \quad B(x_0; \epsilon) \cap S \neq \emptyset$;
- z_0 *é* **ponto fronteiro** *de S se e só se* $\forall \epsilon > 0 \quad B(z_0; \epsilon) \cap S \neq \emptyset$ *e* $B(z_0; \epsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus S) \neq \emptyset$;
- z_0 *é* **ponto de acumulação** *de* S *se e só se* $\forall \epsilon > 0 \ \ B(z_0; \epsilon) \cap (S \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset$.
- z_0 *é* **ponto isolado de** S *se e só se* $\exists \epsilon > 0 \ : \ B(z_0; \epsilon) \cap S = \{z_0\}$.

O conjunto dos pontos interiores (respectivamente exteriores, aderentes, fronteiros e de acumulação) de S designa-se por **interior** *(respectivamente* **exterior, aderência ou fecho,**

[1] Relembre que um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é um par formado por um conjunto X e uma colecção de subconjuntos de X que verificam os seguintes axiomas: (T1) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$; (T2) a união de quaisquer membros de $\mathcal{T}$ é um membro de $\mathcal{T}$; (T3) a intersecção de um número finito de membros de $\mathcal{T}$ é um membro de $\mathcal{T}$. Quando $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, dizemos que $\mathcal{T}$ é uma topologia para X.

fronteira e derivado) *de* S *e denota-se por* $\mathrm{int}(S)$ *ou* $\overset{\circ}{S}$ *(respectivamente* $\mathrm{ext}(S)$, $\overline{S}$, $\mathrm{fr}(S)$ *e* S'*).*

Definição 2.3. *Um subconjunto* S *de* $\mathbb{C}$ *diz-se:*

- **aberto**, *se coincidir com o seu interior, isto é, se* $\forall z \in S \;\; \exists \epsilon > 0 \; : \; B(z;\epsilon) \subseteq S$;
- **fechado**, *se* $\mathbb{C} \setminus S$ *for aberto.*

Exemplo 2.1. *Dados* $R > 0$ *e* $z_0 \in \mathbb{C}$, *os conjuntos* $B(z_0;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ *e* $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$ *são abertos; o conjunto* $\overline{B}(z_0;R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ *é fechado.*
Os conjuntos $\mathbb{C}$ *e* $\emptyset$ *são simultaneamente abertos e fechados.*

Definição 2.4. *Um subconjunto* S *de* $\mathbb{C}$ *diz-se* **limitado** *se estiver contido nalguma bola centrada na origem, isto é, se*

$$\exists M > 0 : \forall z \in S, \; |z| \leq M.$$

Definição 2.5. *Um subconjunto* S *de* $\mathbb{C}$ *que seja simultaneamente fechado e limitado diz-se* **compacto**.

2.2 Funções complexas e continuidade

Vamos introduzir agora alguns conceitos relativos a funções complexas de variável complexa, isto é, funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{C}$ (ou seja, cujo domínio é um subconjunto do plano complexo) e que tomam valores em $\mathbb{C}$ (isto é, cujo contradomínio está contido também em $\mathbb{C}$).

Nota: Se uma função f está definida por uma determinada expressão, então, a não ser que algo seja dito em contrário, entende-se que domínio de f é o conjunto de pontos para os quais essa expressão está bem definida. Por exemplo, se tivermos f definida por

$$f(z) = \frac{z+3}{z^2+1},$$

o domínio de f será $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

Em tudo quanto se segue, S denota um subconjunto arbitrário de $\mathbb{C}$.

Definição 2.6. *Seja* $f\colon S \to \mathbb{C}$ *uma função e seja* z_0 *um ponto de acumulação de* S*. Diz-se que* $w_0 \in \mathbb{C}$ **é limite de** f **quando** z **tende para** z_0*, e escreve-se*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0,$$

quando

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in S \qquad z \in B^*(z_0;\delta) \Longrightarrow f(z) \in B(w_0;\epsilon). \tag{2.4}$$

Nota:
i) z_0 pode ou não pertencer a S e, mesmo que z_0 esteja em S, podemos ter $f(z_0) \neq w_0$.
ii) É essencial que z_0 seja ponto de acumulação de S. [2]
iii) Naturalmente, a condição (2.4) pode exprimir-se como:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in S \qquad 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon.$$

As propriedades dos limites enunciadas nos dois teoremas seguintes demonstram-se facilmente, usando argumentos semelhantes aos utilizados no caso real. A demonstração destas propriedades é deixada ao cuidado dos alunos.

Teorema 2.1 (Unicidade do limite)**.** *Se* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *e* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w'_0$*, então* $w_0 = w'_0$*.*

Teorema 2.2 (Álgebra de limites)**.** *Se* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *e* $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = v_0$*, então:*

$$\begin{aligned} &i) && \lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = w_0 \pm v_0. \\ &ii) && \lim_{z \to z_0} (f(z).g(z)) = w_0.v_0. \\ &iii) && \lim_{z \to z_0} f(z)/g(z) = w_0/v_0 \quad (\textit{se } v_0 \neq 0). \end{aligned}$$

Seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma certa função complexa de variável complexa. Então, podemos considerar as funções (reais), parte real de f e parte imaginária de f, isto é, as funções

$$\begin{array}{rl} \operatorname{Re} f: & S \longrightarrow \mathbb{R} \\ & z \mapsto \operatorname{Re}(f(z)) \end{array}, \qquad \begin{array}{rl} \operatorname{Im} f: & S \longrightarrow \mathbb{R} \\ & z \mapsto \operatorname{Im}(f(z)) \end{array}.$$

[2] Se z_0 fosse ponto isolado de S, então existiria sempre $\delta > 0$ tal que $B^*(z_0;\delta) = \emptyset$, pelo que, nesse caso, f admitiria qualquer valor $w_0 \in \mathbb{C}$ como limite, quando z tendesse para z_0.

Facilmente se verifica, usando as desigualdades

$$|\operatorname{Re} w|, |\operatorname{Im} w| \leq |w| \leq |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w|,$$

(válidas para qualquer número complexo w) que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0 \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} (\operatorname{Re} f)(z) = u_0 \ \text{ e } \ \lim_{z \to z_0} (\operatorname{Im} f)(z) = v_0.$$

O resultado anterior pode ser escrito da forma seguinte:

Teorema 2.3. *Suponhamos que $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é uma função complexa definida num certo conjunto S, que $z_0 = x_0 + iy_0$ é um ponto de acumulação de S e que $w_0 = u_0 + iv_0$. Então:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad e \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

Nota: O teorema anterior relaciona, assim, limites de funções complexas com limites de funções reais de duas variáveis reais.

Por vezes, é útil (sobretudo para mostrar a inexistência de limite de $f(z)$ quando z tende para z_0) investigar limites restringindo a forma como o ponto z tende" para z_0. O lema seguinte e uma consequência simples da definição de limite e a sua demonstração fica a cargo dos alunos.

Lema 2.1. *Sejam $f : S \to \mathbb{C}$ uma função, z_0 um ponto de acumulação de S e $w_0 \in \mathbb{C}$ tais que $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Seja $T \subseteq S$ e suponhamos que z_0 é um ponto de acumulação de T. Se designarmos por g a restrição da função f ao conjunto T, então $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_0$.*

Exemplo 2.2. *Usemos o lema anterior para mostrar que* $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ *não existe. Sejam* T_1 *o eixo real e* T_2 *o eixo imaginário (ambos estes conjuntos têm* $z = 0$ *como ponto de acumulação) e designemos por* f_1 *e* f_2 *as restrições de* $f(z) = \frac{\overline{z}}{z}$ *a* T_1 *e a* T_2*, respectivamente. Se* $z \in T_1$*, então* $z = x \in \mathbb{R}$*, pelo que*

$$\lim_{z\to 0} f_1(z) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in\mathbb{R}}} \frac{x}{x} = 1;$$

de modo análogo, se $z \in T_2$*, então* $z = iy, y \in \mathbb{R}$*, vindo*

$$\lim_{z\to 0} f_2(z) = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{iy}}{iy} = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y\in\mathbb{R}}} \frac{-iy}{iy} = -1;$$

usando o lema anterior, é imediato conclui que não pode existir $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$.

Exemplo 2.3. *Neste exemplo, ilustramos como se pode fazer uso do Mathematica (***com algum cuidado!***) no cálculo de limites de funções complexas e na determinação da parte real e parte imaginária de funções complexas; vemos também como o Mathematica pode ajudar a tentar escrever a expressão de uma função* $f(x, y)$ *em termos de* z.

```
f[z_] = z^3 + 2 z + 1;
(*Cálculo do limite de f quando z→1+2 ⅈ*)
w = Limit[f[z], z → 1 + 2 ⅈ]
```

```
-8 + 2 ⅈ
```

```
(*Determinação de Re f e Im f*)
u[x_, y_] = ComplexExpand[Re[f[x + ⅈ y]]];
v[x_, y_] = ComplexExpand[Im[f[x + ⅈ y]]];
Print["Re f(x,y)=u(x,y)=", u[x, y]]
Print["Im f(x,y)=v(x,y)=", v[x, y]]
```

Re f(x,y)=u(x,y)=$1 + 2\,x + x^3 - 3\,x\,y^2$

Im f(x,y)=v(x,y)=$2\,y + 3\,x^2\,y - y^3$

```
(*Às vezes é preciso pensar com cuidado
  antes de aceitar as respostas do Matrhematica*)
Limit[Conjugate[z] / z, z → 0]
```

```
1
```

```
Limit[Limit[(x - ⅈ y) / (x + ⅈ y), x → 0], y → 0]
```

```
-1
```

```
Limit[Limit[(x - ⅈ y) / (x + ⅈ y), y → 0], x → 0]
```

```
1
```

```
f[x_, y_] = ⅈ x + x^2 - y + y^2;
F[z_] = Simplify[f[x, y] /. ({x^2 + y^2 → Abs[z]^2}) /.
   {x → (z + Conjugate[z]) / 2, y → (z - Conjugate[z]) / (2 ⅈ)}]
```

```
ⅈ z + Abs[z]^2
```

```
f[2, -1]

F[2 - ⅈ]
```

```
6 + 2 ⅈ
6 + 2 ⅈ
```

```
ComplexExpand[F[x + ⅈ y], TargetFunctions → {Re, Im}]
```

```
ⅈ x + x^2 - y + y^2
```

Facilmente se prova, usando a definição, que se f é uma função constante, isto é,

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \mapsto c \quad (c \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

então

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c \qquad (\forall z_0 \in \mathbb{C}\ ).$$

Também, sendo Id a função identidade, isto é,

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}: \ & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \mapsto z \end{aligned}$$

é imediato concluir que

$$\lim_{z \to z_0} \mathrm{Id}(z) = z_0 \qquad (\forall z_0 \in \mathbb{C}\ ).$$

Conclui-se imediatamente dos resultados anteriores e do Teorema 2.2 que, para toda a função polinomial $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, se tem

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0). \tag{2.5}$$

De modo análogo, sendo $P(z)$ e $Q(z)$ dois polinómios, tem-se

$$\lim_{z \to z_0} (P(z)/Q(z)) = P(z_0)/Q(z_0) \qquad (\text{se } Q(z_0) \neq 0). \tag{2.6}$$

É também fácil de provar que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Longrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|. \tag{2.7}$$

Definição 2.7. *Seja $f\colon S \to \mathbb{C}$ e seja z_0 um ponto de acumulação de S. Diz-se que f* **tende para infinito quando z tende para z_0** *e escreve-se*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

quando

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in S \qquad 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > 1/\epsilon.$$

Nota: É usual introduzir-se uma definição de bola centrada em ∞ e raio ϵ, $B(\infty;\epsilon)$, do seguinte modo:

$$B(\infty;\epsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\epsilon}\}.$$

Com esta convenção, a definição anterior pode escrever-se de modo "idêntico" à definição de limite finito (2.4) anteriormente introduzida, isto é

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

se e só se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in S \qquad z \in B^*(z_0; \delta) \Longrightarrow |f(z)| \in B(\infty; \epsilon).$$

Definição 2.8. *Sejam S um conjunto não limitado, f uma aplicação de S em C e $w_0 \in \mathbb{C}$. Diz-se que f* **tende para w_0 quando z tende para infinito**, *e escreve-se*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$$

quando

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \forall z \in S \qquad |z| > \frac{1}{\delta} \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon.$$

Nota: Usando a notação de bola centrada no "ponto" ∞, ter-se-á

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$$

quando

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in S \qquad z \in B(\infty; \delta) \Longrightarrow f(z) \in B(w_0; \epsilon).$$

Definição 2.9. *Seja $f\colon S \to \mathbb{C}$, sendo S não limitado. Diz-se que f* **tende para infinito quando z tende para infinito** *e escreve-se*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$$

quando

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in S \qquad |z| > \frac{1}{\delta} \Longrightarrow |f(z)| > \frac{1}{\epsilon}.$$

Nota: Naturalmente, a definição anterior pode escrever-se do seguinte modo:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$$

quando

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \forall z \in S \qquad z \in B(\infty; \delta) \Longrightarrow f(z) \in B(\infty; \epsilon).$$

Continuidade

Definição 2.10. *Sejam $f\colon S \to \mathbb{C}$ uma função e $z_0 \in S$. Diz-se que f é* **contínua em** z_0 *se*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall z \in S \qquad z \in B(z_0;\delta) \Longrightarrow f(z) \in B(f(z_0);\epsilon) \tag{2.8}$$

Nota: i) se z_0 é um ponto de acumulação de S, a definição anterior é equivalente a dizer que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existe e que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

ii) se z_0 é um ponto isolado de S, então $\exists \delta > 0$ tal que $B(z_0;\delta)$ não contém outros pontos de S além de z_0, e assim,

$$\begin{aligned}[z \in S \wedge z \in B(z_0;\delta)] &\Rightarrow z = z_0\\ &\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| = 0\\ &\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \text{para qualquer } \epsilon > 0.\end{aligned}$$

Por outras palavras, de acordo com a definição adoptada, uma função complexa é sempre contínua em pontos isoladas do seu domínio.

(iii) A definição anterior pode ser escrita também como:

$$f \text{ é contínua em } z_0 \Longleftrightarrow [\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ f(S \cap B(z_0;\delta)) \subseteq B(f(z_0);\epsilon)]\,.$$

ou ainda, como:

$$f \text{ é contínua em } z_0 \Longleftrightarrow [\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in S \qquad |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon]\,.$$

Definição 2.11. *Uma função $f\colon S \to \mathbb{C}$ diz-se* **contínua** *se for contínua em cada ponto $z \in S$.*

Teorema 2.4. *Sejam $f\colon S \to \mathbb{C}$ e $g\colon T \to \mathbb{C}$ duas funções tais que $f(S) \subseteq T$. Se f é contínua em z_0 e g é contínua em $f(z_0)$, então a função composta $g \circ f$ é contínua em z_0.*

Dem: Como exercício. $\boxdot$

Teorema 2.5. *Sendo $f\colon S \to \mathbb{C}$ e $g\colon S \to \mathbb{C}$ funções contínuas, são também contínuas as funções $f+g$, $f-g$, $f.g$ e f/g .*
(Relembre que a função f/g está apenas definida no conjunto $\{z \in S\ :\ g(z) \neq 0\}$.)

Dem: Utilize o Teorema 2.2. ⊡

Como consequência imediata do Teorema 2.3, temos também o seguinte teorema:

Teorema 2.6. *A função f é contínua em $z_0 = x_0 + iy_0$ se e só se as funções $\Re f$ e $\Im f$ forem contínuas em (x_0, y_0).*

Um caso com particular interesse é aquele em que S é um intervalo real $[a, b]$ (considerado como subconjunto de $\mathbb{C}$). Para $z \in [a, b]$, $z = x + i0$, e assim podemos simplificar a notação e escrever $f(z) = f(x) = u(x) + iv(x)$. Portanto, uma função

$$f = u + iv \colon [a, b] \to \mathbb{C}$$

é contínua se e só se $u(x)$ e $v(x)$ forem contínuas.

Exemplo 2.4. *A função $f \colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ onde $f(x) = x^3 + 3x^2 i$ é contínua, uma vez que $u(x) = x^3$ e $v(x) = 3x^2$ são ambas contínuas.*

2.3 Arcos. Conjuntos conexos

Definição 2.12. *Sejam S um subconjunto de $\mathbb{C}$ e $[a, b]$ um intervalo fechado em $\mathbb{R}$. A toda a função contínua $\gamma \colon [a, b] \to S$ chamamos* **caminho** *(ou* **arco** *ou* **curva***) em S.*

Definição 2.13. *Seja $\gamma : [a, b] \to S \subseteq \mathbb{C}$ um caminho.*

- *A $z_0 = \gamma(a)$ e $z_1 = \gamma(b)$ chamamos, respectivamente,* **ponto inicial** *e* **ponto final** *do caminho γ; nesse caso, dizemos que γ é um caminho em S de z_0 para z_1.*
- *Dizemos que $w \in \mathbb{C}$ é um ponto sobre a curva γ, se $w = \gamma(t)$, para algum $t \in [a, b]$.*
- *Ao contradomínio da curva γ, isto é, ao conjunto*

  $$\{\gamma\} := \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$$

  chamamos **traço** *(ou* **imagem** *ou* **trajectória***) de γ. Dizemos que a curva γ é uma parametrização de $\{\gamma\}$.*

Nota:

- Frequentemente, por comodidade de linguagem, "confundiremos" o caminho com a sua imagem, isto é, falaremos simplesmente do caminho γ querendo referir-nos ao conjunto $\{\gamma\}$.
- Ao esboçar o traço de um caminho, é usual indicar, com uma seta, "o sentido" em que os pontos são percorridos quando t varia em $[a, b]$.

  Por exemplo, sendo $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ definido por $\gamma(t) = \text{cis}(t)$, o seu traço será representado com se indica na figura seguinte.

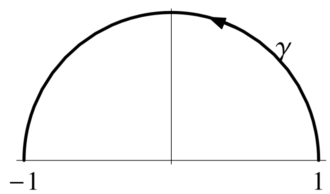


Figura 2.3: Traço do caminho $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, tal que $\gamma(t) = \text{cis}(t)$.

Exemplo 2.5. *Segue-se um exemplo da utilização do comando* `ParametricPlot` *para esboçar o traço de uma curva dada a sua parametrização.*

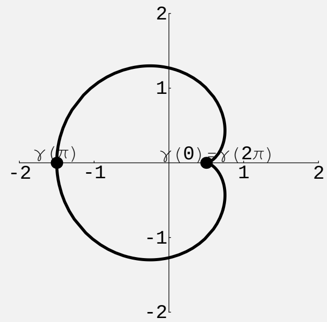
Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *a curva definida por*

$$\gamma(t) = \cos(t) - \frac{1}{2}\cos(2t) + i(\text{sen}(t) - \frac{1}{2}\text{sen}(2t))$$

Esboce essa curva, identificando os seus pontos inicial e final, bem como o ponto $\gamma(\pi)$.

```
$DefaultFont = {"Courier", 14};
γ[t_] := {Cos[t] - 1/2 Cos[2 t], Sin[t] - 1/2 Sin[2 t]};
textos = {{PointSize[0.04],
        Point[γ[0]], Point[γ[ π]]},
   Text["γ(0)=γ(2π)", γ[0 + .2 π]],
   Text["γ(π)" , γ[π - .02 π]]};

ParametricPlot[Evaluate[γ[t]], {t, 0, 2 Pi},
  PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}, AspectRatio → 1,
  Ticks → {{-2, -1, 1, 2}, {-2, -1, 1, 2}},
  PlotStyle → Thickness[0.01], Axes → True, Epilog → textos];
```



Nota: Esta curva é conhecida por *cardióide*. O primeiro a estudar esta curva foi Römer (1674), mas quem a "baptizou"com o nome de cardióide foi De Castillon, num artigo que apareceu em *Philosophical Transactions of the Royal Society* (1741). Faça uma pequeno estudo sobre esta e algumas outras curvas especiais: ciclóide, oval de Cassini, lemniscatas de Bernoulli e de Gerono, fólio de Descartes, por exemplo.

Definição 2.14. *Seja $\gamma : [a, b] \to S \subseteq \mathbb{C}$ uma curva em S. Então:*

- *A curva γ diz-se* **fechada** *se $\gamma(a) = \gamma(b)$, dizendo-se* **aberta** *caso contrário.*

- *A curva γ diz-se* **simples** *se, para quaisquer $t_1, t_2 \in [a, b]$, com $t_1 \neq t_2$, for $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, com a possível excepção $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

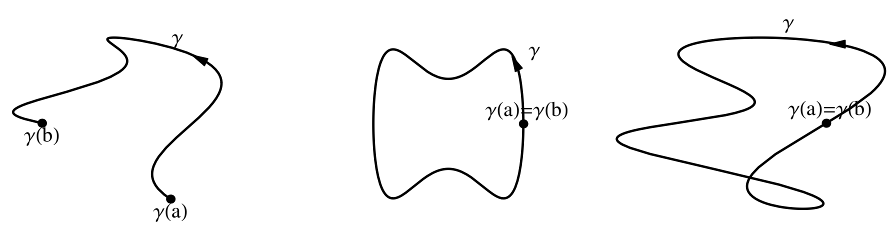


Figura 2.4: Curva aberta simples, curva fechada simples e curva fechada não-simples

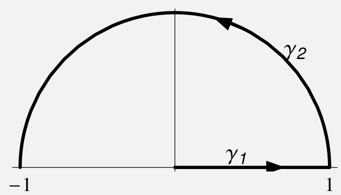
Definição 2.15. *Sejam $\gamma_1 \colon [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 \colon [c, d] \to \mathbb{C}$ dois caminhos tais que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, isto é, tais que o ponto final do primeiro coincide com o ponto inicial do segundo.*

Chama-se **soma** *de* γ_1 *com* γ_2 *e denota-se por* $\gamma_1+\gamma_2$, *o caminho* $(\gamma_1+\gamma_2)\colon [a, d+b-c] \to \mathbb{C}$ *definido por*

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \le t \le b \\ \gamma_2(t+c-b), & b \le t \le d+b-c. \end{cases}$$

Exemplo 2.6. *Sejam* $\gamma_1(t) = t \quad (0 \le t \le 1)$ *e* $\gamma_2(t) = \mathrm{cis}(t) \quad (0 \le t \le \pi)$. *Então*

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1, \\ \mathrm{cis}(t-1) & 1 \le t \le \pi+1. \end{cases}$$



Se $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$, $\dots$, $\gamma_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{C}$ são n caminhos tais que $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1}); i = 1, \dots, n-1$, então define-se o caminho $\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n$, recursivamente, através da fórmula $\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n = (\gamma_1+\dots+\gamma_{n-1})+\gamma_n$.

Definição 2.16. *Dado um caminho* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, *chama-se* **caminho oposto** *de* γ *e denota-se por* $-\gamma$ *o caminho definido por*

$$-\gamma(t) := \gamma(a+b-t), \quad t \in [a, b].$$

Note-se que :

(i) $\{\gamma\} = \{-\gamma\}$, para todo o caminho γ.

(ii) Se γ é um caminho de z_1 a z_2, então $-\gamma$ é um caminho de z_2 a z_1.

Exemplo 2.7. *Sejam* $z, w \in \mathbb{C}$. *Considere-se a curva* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$\gamma(t) = z + (w-z)t. \tag{2.9}$$

O traço desta curva é o segmento de recta cujos extremos são os pontos z *e* w. *É usual denotar este caminho* γ *pelo símbolo* $[z, w]$, *sendo essa a notação que passaremos a adoptar.*
Nota: *Pelo contexto, será claro se se trata dum caminho deste tipo ou de um intervalo fechado de números reias.*

Definição 2.17. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$, diz-se que P é um* **caminho poligonal** *(ou* **linha poligonal***, ou, mais simplesmente, um* **polígono***) de z para w, se P for uma soma de caminhos cujos traços são segmentos, isto é, for uma curva da forma*

$$P = \sum_{k=1}^{n-1} [z_k, z_{k+1}] \tag{2.10}$$

onde $z_1 = z$ e $z_n = w$.

Se P é o polígono (2.10), costuma escrever-se

$$P = [z_1, z_2, \ldots, z_n]. \tag{2.11}$$

Note-se que um polígono $P = [z_1, z_2, \ldots, z_n]$ é um arco de z_1 a z_n.

Definição 2.18. *Um conjunto $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{C}$ é dito* **desconexo** *se existirem dois subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$, U e V, tais que:*

(i) $S \cap U \neq \emptyset$; $S \cap V \neq \emptyset$

(ii) $S \cap (U \cap V) = \emptyset$;

(iii) $S \subseteq (U \cup V)$

Se S não é desconexo, dizemos que S é **conexo**.

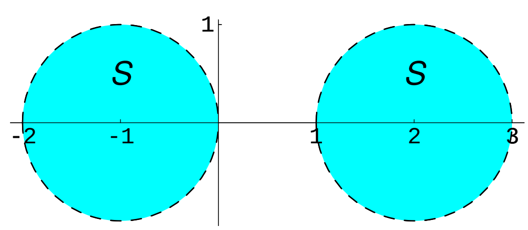


Figura 2.5: S é desconexo

Definição 2.19. *Um subconjunto S de $\mathbb{C}$ ($S \neq \emptyset$) diz-se* **conexo por arcos** *se, dados quaisquer dois pontos z, w em S, existe sempre um arco em S de z a w.*

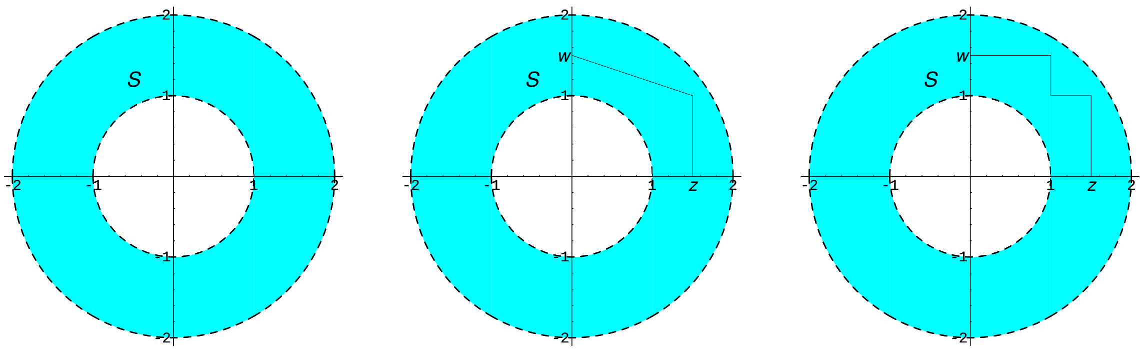


Figura 2.6: Conjunto conexo e poligonalmente conexo (na última figura, escolha de polígono com segmentos paralelos aos eixos)

Definição 2.20. *Um subconjunto S de $\mathbb{C}$ ($S \neq \emptyset$) diz-se* **poligonalmente conexo** *se, dados quaisquer dois pontos z, w em S existe uma linha poligonal de z a w cujo traço está totalmente contido em S.*

Evidentemente, todo o conjunto poligonalmente conexo é conexo por arcos. Prova-se ainda que um conjunto conexo por arcos é conexo. Além disso, pode demonstrar-se que, se S é aberto e conexo, então S é poligonalmente conexo (donde, conexo por arcos); a demonstração destes resultados pode ver-se, por exemplo, em [Con91, p.15].

Conclusão: Sendo S um conjunto aberto, os conceitos de conexo, conexo por arcos e poligonalmente conexo são equivalentes. Pode ainda demonstrar-se (veja, e.g. [Con91, p.15-16]) que, se S é aberto e conexo e $z, w \in S$, então existe um polígono de z para w, cujo traço está contido em S e é formado por segmentos de recta paralelos aos eixos coordenados; ver Fig. 2.6 .

Seja S um subconjunto de $\mathbb{C}$ e defina-se em S uma relação binária R_c por

$$\forall z_1, z_2 \in S \qquad z_1 R_c z_2 \Longleftrightarrow \text{Existe um caminho } \gamma \text{ em } S \text{ de } z_1 \text{ para } z_2. \tag{2.12}$$

Facilmente se verifica que R_c é uma relação de equivalência definida em S e que as respectivas classes de equivalência são conjuntos conexos.

Às classes de equivalência definidas no conjunto S pela relação (2.12) chamamos **componentes conexas** de S.

Por exemplo, as componentes conexas do conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$ são

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Além disso, se S é aberto, as suas componentes conexas são conjuntos abertos.

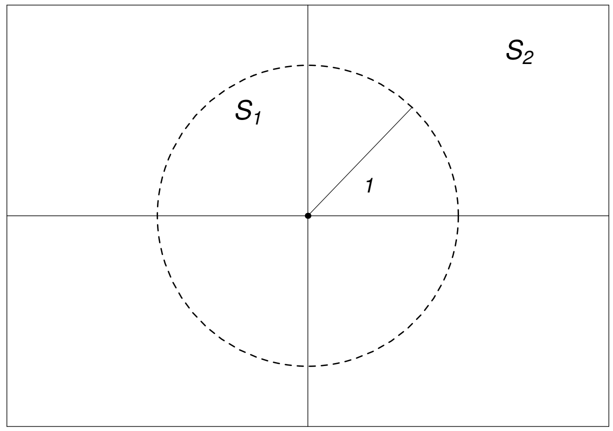


Figura 2.7: Componentes conexas de $S = \{z : |z| \neq 1\}$

Teorema 2.7. *Seja* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *um caminho no plano complexo. Então:*

(i) O traço de γ, $\{\gamma\}$, *é um conjunto fechado e limitado.*

(ii) O complementar de $\{\gamma\}$ *em* $\mathbb{C}$, *isto é, o conjunto*

$$C_\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z \neq \gamma(t), \forall t \in [a,b]\}$$

é um conjunto aberto e tem uma (e uma só) componente conexa ilimitada.

Dem:

(i) Comecemos por notar que, sendo γ um caminho, então a função real $|\gamma|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, por ser composta de duas funções contínuas. Assim sendo, essa função é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|\gamma(t)| \leq M$, para qualquer $t \in [a,b]$. Isto significa que o traço de γ está totalmente contido na bola de centro na origem e raio M, isto é, que $\{\gamma\}$ é um conjunto limitado.

Ao demonstrarmos (ii) ficará, naturalmente, demonstrado que $\{\gamma\}$ é fechado.

(ii) Seja, então, z_0 um ponto qualquer do conjunto C_γ, complementar de $\{\gamma\}$ em $\mathbb{C}$, e consideremos a função

$$\mu(t) = |\gamma(t) - z_0|, \qquad t \in [a, b].$$

A função μ é uma função real contínua definida num intervalo fechado, pelo que atinge nesse intervalo um máximo e um mínimo absolutos. Em particular, existirá $t_0 \in [a, b]$ tal que

$$m = \mu(t_0) = \min_{a \leq t \leq b} \mu(t).$$

Logo, temos $\mu(t) \geq m$, para todo o t em $[a, b]$. Além disso, uma vez que z_0 está em C_γ (isto é, $z_0 \neq \gamma(t)$, para qualquer $t \in [a, b]$), terá de ser $m > 0$. Em resumo, temos $|\gamma(t) - z_0| \geq m > 0$. Isto significa que $B(z_0, m)$ está totalmente contida em C_γ, o que mostra que C_γ é um conjunto aberto; ver Fig. 2.8.

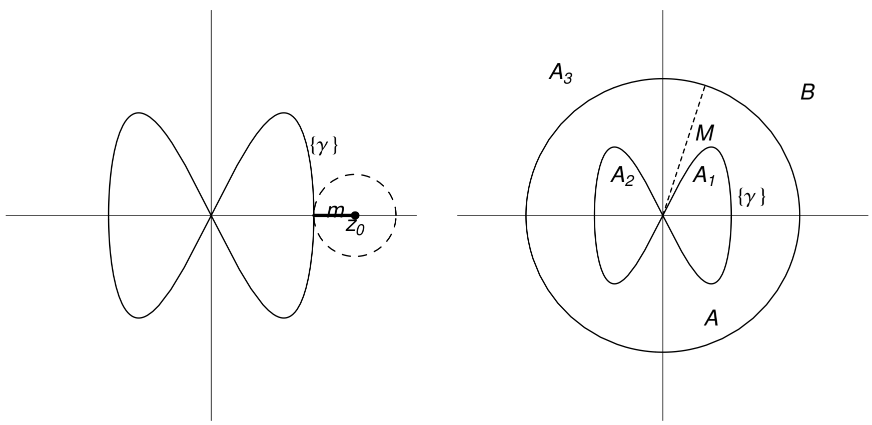


Figura 2.8: Figuras do Teorema 2.7

Finalmente, uma vez que $\{\gamma\}$ está contida no conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq M\}$ e uma vez que $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > M\}$ é um conjunto conexo, a única componente ilimitada é a que contém B; todas as outras componentes estão contidas em A; veja a Fig.2.8 (no caso, C_γ tem 3 componentes conexas, A_1, A_2 e A_3, sendo A_3 ilimitada). $\boxdot$

Definição 2.21. *Um subconjunto S de $\mathbb{C}$ ($S \neq \emptyset$) diz-se um* **domínio** *se for aberto e conexo.*

2.4 Exercícios

Exercício 2.1. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$ são abertos, quais são fechados e quais são compactos. Indique qual o fecho dos conjuntos que não forem fechados.

a) $\{z : 1 < |z| < 2\}$

b) $\{z : \text{Re}\, z \geq 0, \text{Im}\, z \leq 0\}$

c) O eixo real

d) $\{z : \text{Im}\, z \geq 0, 1 < |z| < 2\}$

e) $\{z : \text{Re}(zz_0) > 0, z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq 0\}$

f) $\{z : |z - \overline{z_0}| = |\overline{z} - z_0|,\ z_0 \in \mathbb{C}\}$

g) $\{z : \text{Re}(z^2) \leq 0\}$

h) $\{z : |z|^2 > z + \overline{z}\}$.

Exercício 2.2.

a) Escreva a função $f(z) = z^3 + z + 1$ na forma $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

b) Seja $f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$. Exprima o lado direito em termos de $z = x + iy$ e simplifique.

Exercício 2.3.

a) Seja $f(x + iy) = x + y + i(x^2y - y^3)$. Calcule $f(1 + 2i)$ e $f(2i - 1)$.

b) Seja $f(z) = z^2 + 2z\overline{z} - 3\Im(z)$. Calcule $f(-2 + i)$ e $f(3i - 1)$.

c) Seja $f(z) = z^{12} + 4z^8 - 3z^2 + 1$. Calcule $f(-1 + i)$.

Exercício 2.4. Prove, através da definição, que:

a) $\lim_{z\to z_0} \text{Re}\, z = \text{Re}\, z_0$.

b) $\lim_{z\to z_0} \overline{z} = \overline{z_0}$.

c) $\lim_{z\to 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i$.

d) $\lim_{z\to z_0} z^2 = {z_0}^2$.

e) $\lim_{z\to 0} (\frac{\overline{z}^2}{z}) = 0$.

Exercício 2.5. Calcule, caso existam, ou mostre que não existem, os seguintes limites:

a) $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z} (z_0 \neq 0)$ *b)* $\lim_{z\to i} \frac{iz^3-1}{z+i}$ *c)* $\lim_{z\to i} \frac{iz^3-1}{z-i}$

d) $\lim_{z\to 0} \frac{|z|}{z}$ *e)* $\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z}$ *f)* $\lim_{z\to 0} \frac{|z|}{z^2}$

Exercício 2.6. Mostre que:

a)

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \lim_{z\to 0} f(1/z) = w_0.$$

b)

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Exercício 2.7. Em cada um dos casos seguintes, a fronteira de S pode ser descrita como a imagem de um caminho. Represente S geometricamente e especifique uma função definindo o caminho:

a) $S = \{z : |z| \leq 1 \ , \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$

b) $S = \{z : 1 \leq |z| \leq 2 \ , \ \operatorname{Im} z \leq 0\}$

c) $S = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \ , \ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$

d) $S = \{z : 1 \leq |z| \leq 2 \ , \ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Re} z\}$.

Exercício 2.8. Para cada um dos conjuntos S e cada par de pontos z_1, z_2 seguintes, defina, se possível, um caminho em S de z_1 a z_2:

a) $S = \{z : |z| < 2\}$ $z_1 = 1 + i;\ z_2 = 1 - i$

b) $S = \{z : |z| = 1\}$ $z_1 = -i;\ z_2 = i$

c) $S = \{z : 1 \leq |z| < 2\}$ $z_1 = \sqrt{2};\ z_2 = -\sqrt{2}$

d) $S = \{z : |1 - |z|| > 1/2\}$ $z_1 = i/3;\ z_2 = -4(1 + i)$

Exercício 2.9. Seja $S \subseteq \mathbb{C}$ e seja R_C a relação binária definida em S por (2.12). Mostre que:

a) R_C é uma relação de equivalência.

b) As classes de equivalência definidas em S por R_C são conjuntos conexos.

c) Se S é não vazio e aberto, então cada componente conexa de S (i.e., cada uma das classes de equivalência para a relação R_C) é um domínio.

Exercício 2.10. Prove que a bola aberta $B(0;1)$ é um conjunto conexo.

Sugestão: Mostre que, se $z, w \in B(0;1)$, então o segmento de recta $[z, w]$ está totalmente contido em $B(0;1)$.

Exercício 2.11. Diga quais dos seguintes conjuntos são domínios:

a) $S = \{z : \mathrm{Re}(z) > 2\}$

b) $S = \{z : -1 < \mathrm{Im}(z) < 2\}$

c) $S = \{z = r \operatorname{cis} \theta : 0 < r < 1, -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$

d) $S = \{z : |z| < 1 \text{ ou } |z - 3| < 1\}$.

3. Séries de potências

Power series are therefore especially convenient
because one can compute with them almost as with polynomials.

C. Carathéodory

cit. em R. Remmert, *Theory of Complex Functions*.

Este capítulo é dedicado, essencialmente, ao estudo de séries de potências, as quais desempenham um papel muito importante em análise complexa. Antes de iniciarmos esse estudo, é, no entanto, necessário introduzir alguns resultados básicos sobre sucessões e séries de números complexos. Esses resultados são uma tradução simples para $\mathbb{C}$ de resultados já conhecidos dos alunos para o caso real, [1] pelo que serão tratados com alguma brevidade.

3.1 Sucessões complexas

Definição 3.1. *Uma* **sucessão complexa** *é uma aplicação $f\colon \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C}$.*[2] *Se $f(n) = z_n$ costuma denotar-se a sucessão por por $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (ou por $(z_n)_n$ ou ainda, mais simplesmente, por (z_n)). Para $k \in \mathbb{N}_0$, o número $z_k = f(k)$ é chamado* **termo** *de ordem k da sucessão.*

Definição 3.2. *Seja $(z_n)_n$ uma sucessão e seja $z \in \mathbb{C}$. Diz-se que a sucessão $(z_n)_n$* **tende**

[1] Aconselha-se o aluno a fazer uma revisão de sucessões e séries de números reais!

[2] É mais usual definir-se sucessão como sendo uma função de domínio $\mathbb{N}$; no entanto, neste curso, esta definição é mais conveniente.

para z *quando* n *tende para infinito (ou que* z *é* **limite da sucessão** $(z_n)_n$*), e escreve-se*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

ou, de modo equivalente,

$$z_n \to z \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

se a sucessão real $(|z_n - z|)_n$ *tende para zero, ou seja, se*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}_0 \; \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > p \Longrightarrow |z_n - z| < \epsilon.$$

Uma sucessão que tende para um limite diz-se **convergente**, *dizendo-se* **divergente** *caso contrário.*

Facilmente se prova que o limite de uma sucessão convergente é único.

Definição 3.3. *Diz-se que uma sucessão* $(z_n)_n$ **diverge para infinito** *(e escreve-se* $(z_n)_n \to \infty$ *ou* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$*) se*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}_0 \; \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > p \Longrightarrow |z_n| > 1/\epsilon.$$

O problema da determinação de limites de sucessões complexas pode ser reduzido directamente ao caso real, através da utilização do resultado seguinte.

Lema 3.1. *Sejam* $(z_n)_n$ *uma sucessão complexa e* $z \in \mathbb{C}$*. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z.$$

Dem: Ao cuidado dos alunos. $\boxdot$

Definição 3.4. *Uma sucessão* $(z_n)_n$ *diz-se uma* **sucessão de Cauchy** *se*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}_0 \; \forall m, n \in \mathbb{N} \qquad m > n > p \Longrightarrow |z_m - z_n| < \epsilon.$$

O teorema seguinte mostra que, à semelhança de $\mathbb{R}$, também o espaço métrico $\mathbb{C}$ é completo.

Teorema 3.1. *Uma sucessão* $(z_n)_n$ *é convergente se e só se é de Cauchy.*

Dem: Como exercício. $\boxdot$

3.2 Séries complexas

Definição 3.5. *Dada uma sucessão complexa $(z_n)_n$ chama-se* **série** *infinita associada a essa sucessão, à sucessão $(\mathcal{S}_k)_k$ onde*

$$\mathcal{S}_k = \sum_{n=0}^{k} z_n, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

O termo $\mathcal{S}_p = \sum_{n=0}^{p} z_p$ é chamado **soma parcial** *de ordem p da série infinita $(\mathcal{S}_k)_k$. Se a série infinita converge para $\mathcal{S}$, diz-se que $\mathcal{S}$ é a soma da série e escreve-se*

$$\mathcal{S} = \sum_{k=0}^{\infty} z_k.$$

Nota:

- Tal como é habitual com séries reais, com algum abuso de notação, $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ (ou $\sum_k z_k$, ou ainda, $\sum z_k$) será usado para denotar quer própria série infinita (i.e. a sucessão $(\mathcal{S}_k)_k$), quer a sua soma.
- Por vezes, poderá ser conveniente usar notações tais como $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$, $\sum_{k=2}^{\infty} z_k$, etc; deveremos interpretar $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k (k_0 > 0)$, como $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ com $z_0 = z_1 = \ldots = z_{k_0-1} = 0$.

Lema 3.2. *Uma série $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ converge se e só se*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}_0 \ \forall m, n \in \mathbb{N} \qquad m > n > p \Longrightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} z_k| < \epsilon.$$

Dem: Basta notar que

$$\sum_{k=n+1}^{m} z_k = \sum_{k=0}^{m} z_k - \sum_{k=0}^{n} z_k = \mathcal{S}_m - \mathcal{S}_n$$

e aplicar o Teorema 3.1 à sucessão $(\mathcal{S}_k)_k$. $\boxdot$

Lema 3.3. *A série complexa $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ converge se e só se ambas as séries reais $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_k$ convergirem, tendo-se, nesse caso,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_k + i \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_k.$$

Dem: Trata-se de uma consequência imediata do Lema 3.1. $\boxdot$

Os resultados enunciados nos dois lemas seguintes deduzem-se de imediato de resultados análogos conhecidos para séries reais, fazendo uso do Lema 3.3.

Lema 3.4. *Se* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *converge, então* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} z_k = 0$.

Lema 3.5. *Sejam* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ *duas séries convergentes, de soma* Z *e* W*, respectivamente e seja* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Então, as séries* $\sum_{k=0}^{\infty}(z_k + w_k)$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda z_k)$ *são convergentes, com soma* $Z + W$ *e* λZ*, respectivamente.*

Definição 3.6. *Uma série* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *diz-se* **absolutamente convergente** *se a série correspondente à sucessão dos módulos,* $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$*, for convergente.*

Teorema 3.2. *Toda a série absolutamente convergente é convergente.*

Dem: Seja $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ uma série absolutamente convergente. Como

$$|\operatorname{Re}(z_k)| \le |z_k| \quad \text{e} \quad |\operatorname{Im}(z_k)| \le |z_k|$$

e a série $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ é convergente, o chamado *Critério de Comparação* para séries reais não negativas[3] implica que são convergentes ambas as séries $\sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Re} z_k|$ e $\sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Im} z_k|$.

Como toda a série real absolutamente convergente é convergente, segue-se que $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_k$ convergem, donde, pelo Lema 3.3, também a série $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ converge. $\boxdot$

O resultado do teorema anterior é importante, porque $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ é uma série **real** e os conhecidos critérios de convergência para séries reais podem, por isso, ser aplicados a essa série. Em particular, têm-se os seguintes resultados, obtidos por aplicação directa dos chamados *Critério de Comparação*, *Critério da Razão* e *Critério da Raiz*.

Teorema 3.3 (Critério de Comparação)**.** *Sejam* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ *duas séries complexas com* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *absolutamente convergente. Se, para todo o inteiro* $k \in N$ *(superior a um certo inteiro* p*), tivermos* $|w_k| \le M|z_k|$ *para um determinado* $M > 0$*, então a série* $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ *é absolutamente convergente (donde, convergente).*

[3]Relembre: *Sejam* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *duas sucessões de termos reais não negativos tais que, para todo o* n *superior a um determinado inteiro* p*, se tem* $a_n \le M b_n$*, para um certo* $M > 0$*. Se a série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge, o mesmo se passa com a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*.*

Teorema 3.4 (Critério da Razão (ou d'Alembert))**.** *Seja $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ uma série complexa com termos não nulos*[4] *e suponhamos que existe* $\lim_{k\to\infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|}$ *(finito ou $+\infty$). Sendo λ o limite anterior, tem-se:*

- *Se $\lambda < 1$, a série converge absolutamente.*
- *Se $\lambda > 1$, a série diverge.* [5]
- *Se $\lambda = 1$, nada se pode concluir.*

Teorema 3.5 (Critério da Raiz (ou de Cauchy))**.** *Seja $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ uma série complexa e suponhamos que existe* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|}$ *(finito ou $+\infty$). Sendo λ o limite anterior, tem-se:*

- *Se $\lambda < 1$, a série converge absolutamente.*
- *Se $\lambda > 1$, a série diverge.*
- *Se $\lambda = 1$, nada se pode concluir.*

Existe uma versão mais refinada do Critério da Raiz, conhecida como Critério de Cauchy-Hadamard, em que a discussão da convergência/divergência é feita usando um valor de λ cujo cálculo não está dependente da existência de qualquer dos limites $\lim_k \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|}$ ou $\lim_k \sqrt[k]{|z_k|}$.

Para dar esse critério, necessitamos de introduzir o conceito de limite superior de uma sucessão.

Definição 3.7. *Seja $(a_k)_k$ uma sucessão de números reais não negativos, limitada. Chama-se* **limite superior** *dessa sucessão, e denota-se por* $\limsup_{k\to\infty} a_k$, *ao valor dado por*

$$\limsup_{k\to\infty} a_k := \lim_{k\to\infty} s_k, \quad \textit{onde} \quad (s_k)_k = (\sup\{a_k, a_{k+1}, \ldots\})_k \,. \tag{3.1}$$

Note-se que as hipóteses sobre a sucessão $(a_k)_k$ garantem que a sucessão dos supremos $(s_k)_k$ é uma sucessão monótona decrescente (em sentido lato) e majorada, pelo que o limite dado por (3.1) existe sempre.

[4] Apenas é necessário que a série não tenha termos nulos a partir de uma determinada ordem.

[5] Aplicando directamente à série $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ o chamado critério da raiz para séries reais, apenas podemos concluir que $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ diverge. No entanto, uma análise cuidados da demonstração desse critério mostra que se tem $\lim_{k\to\infty} |z_k| \neq 0$, donde também $\lim_{k\to\infty} z_k \neq 0$, pelo que a série $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ é, de facto, divergente.

Se a sucessão dada não for limitada, consideramos, por definição,

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = +\infty. \tag{3.2}$$

De acordo com a definição anterior, o limite superior de uma sucessão (de reais não negativos) existe sempre, podendo ser $+\infty$. [6]

Além disso, pode provar-se que, se existir $\lim_{k\to\infty} a_k$, será $\limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a_k$.

O resultado enunciado a seguir também será usado posteriormente:

Se $(a_k)_k$ e $(b_k)_k$ são duas sucessões de números reais positivos tais que existe $a = \lim_{k\to\infty} a_k$ e $0 < a < +\infty$), então,

$$\limsup_{k\to\infty}(a_k b_k) = a \limsup_{k\to\infty} b_k;$$

para este e outros resultados sobre o limite superior, veja, e.g. [Lan93, pp.54-55] e [**?**, pp.30-33].

Exemplo 3.1. *Seja $(c_k)_k$ a sequência dada por $c_k = 3 + (-1)^k$. Então, $\lim_{k\to\infty} c_k$ não existe, mas $\limsup_{k\to\infty} c_k = 4$.*

Sendo $(c_k)_k$ a sucessão dada por $c_k = 3^k$, tem-se $\lim_{k\to\infty} c_k = \limsup_{k\to\infty} c_k = +\infty$.

Passamos então a apresentar o critério de Cauchy-Hadamard.

Teorema 3.6 (Critério de Cauchy-Hadamard)**.** *Seja $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ uma série complexa e seja $\lambda = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|}$. Então, tem-se:*

- *Se $\lambda < 1$, a série converge absolutamente.*
- *Se $\lambda > 1$, a série diverge.*
- *Se $\lambda = 1$, nada se pode concluir.*

Dem: Veja, e.g. [MH01, p.149].

O seguinte critério de convergência (que daremos sem demonstração) é por vezes útil.

---

[6] Definimos o limite superior apenas para sucessões de números não negativos, por ser esse o caso que nos interessa; a definição, pode, no entanto, extender-se facilmente para outras sucessões, podendo, nesse caso, ter-se $\limsup_k a_k = -\infty$.

Teorema 3.7 (Critério de Dirichlet). *Sejam $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ uma série complexa e $(a_k)_k$ uma sucessão de números reais, tais que:*

- *a série é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$|\sum_{k=0}^{n} z_k| < M;$$

- *a sucessão $(a_k)_k$ é decrescente;*

- $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Então, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ é convergente.

Exemplo 3.2. *O critério de Dirichlet tem como corolário imediato o conhecido critério de Leibniz para séries alternadas, o qual afirma que, se $(a_n)_n$ é uma sucessão de números reais tais que $a_n > a_{n+1} > 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge. Com efeito, basta considerar $z_n = (-1)^n$.*

Exemplo 3.3. *Vejamos um exemplo em que, com a ajuda do Mathematica, conseguimos determinar a soma de uma dada série (convergente) e outro em que o Mathematica nos indica que a série que pretendemos somar é divergente.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3-4\,i}{6}\right)^n$$

$$\frac{18}{25} - \frac{24\,i}{25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{n}$$

```
Sum::div : Sum does not converge. More…
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{n}$$

Mostre que a primeira série é, de facto, convergente e que a segunda diverge!

Lema 3.6. *Sejam $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ duas séries absolutamente convergentes com somas Z e W, respectivamente e seja $V_k = z_0 w_k + z_1 w_{k-1} + \ldots + z_k w_0 = \sum_{n=0}^{k} z_n w_{k-n}$. Então, a série $\sum_{k=0}^{\infty} V_k$ é absolutamente convergente e a sua soma é dada por $Z.W$.*

Dem: Trata-se de uma generalização directa do correspondente resultado em análise real; os pormenores da demonstração ficam ao cuidado dos alunos. $\boxdot$

3.3 Sucessões e séries de funções

Ao longo desta secção S denota um subconjunto não vazio de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções complexas definidas em S, isto é, o conjunto de funções f tais que $f : S \to \mathbb{C}$.

Definição 3.8. *Chama-se* **sucessão de funções em** S *a qualquer aplicação de $\mathbb{N}_0$ em $\mathcal{F}$.*

Nota: As sucessões de funções serão denotadas de modo análogo ao usado para sucessões numéricas, isto é, escreveremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(f_n)_n$ ou simplesmente (f_n) para denotar uma sucessão cujo termo de ordem n seja f_n.

Definição 3.9. *Dada uma sucessão $(f_n)_n$ de funções em S, chama-se* **série infinita de funções** *associada à sucessão $(f_n)_n$, e denota-se por $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$[7] a sucessão $(\mathcal{S}_k)_k$, onde*

$$\mathcal{S}_k = \sum_{n=0}^{k} f_n.$$

Ao tratar de sucessões e séries de funções, existe uma diferença importante em relação ao caso de sucessões e séries numéricas: é necessário distinguir dois tipos de convergência: a convergência pontual da convergência uniforme. Começamos por introduzir a definição de convergência pontual de uma sucessão de funções.

Definição 3.10. *Dada uma sucessão $(f_n)_n$ de funções em S, diz-se que $(f_n)_n$* **converge pontualmente em** S *para uma determinada função f, definida em S, se, para todo o $z \in S$, a sucessão (numérica) $\left(f_n(z)\right)_n$ convergir para $f(z)$, ou seja, se se verificar*

$$\forall z \in S \ \forall \epsilon > 0 \ \exists p = p(z;\epsilon) \in \mathbb{N}_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > p \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon. \tag{3.3}$$

Nestas condições escreve-se $f_n \to f$ (em S) ou $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

[7] Ou mais simplesmente $\sum_k f_k$ ou $\sum f_k$

Introduzimos agora o conceito (mais forte) de convergência uniforme.

Definição 3.11. *Dada uma sucessão $(f_n)_n$ de funções em S, diz-se que $(f_n)_n$* **converge uniformemente** *em S para uma função f definida em S se*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists p = p(\epsilon) \in \mathbb{N}_0 \, \forall z \in S \, \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > p \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon. \tag{3.4}$$

Neste caso, escreve-se $f_n \to f$ (uniformemente em S).

Definição 3.12. *Uma série de funções $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge pontualmente (respectivamente uniformemente) para uma determinada função f, se a correspondente sucessão das somas parciais $(\mathcal{S}_n)_n$ convergir pontualmente (respectivamente uniformemente) para f. Nesse caso escreve-se $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ (respectivamente $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ uniformemente). Diz-se que $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge* **absolutamente** *se a série $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$ for convergente.*

Teorema 3.8.

(i) Se $(f_n)_n$ é uma sucessão de funções contínuas em S e $f_n \to f$ **uniformemente** *em S, então f é contínua em S.*

(ii) Se $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente para f em S, e se todas as funções f_k são contínuas em S, então f é também contínua em S.

Dem: (i) Pretendemos mostrar que, dado um elemento arbitrário $z_0 \in S$ e um valor arbitrariamente pequeno $\epsilon > 0$, é possível encontrar $\delta > 0$ de tal modo que

$$\forall z \in S \qquad |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Seja $\varepsilon = \epsilon/3$. A convergência uniforme de $(f_n)_n$ para f garante a existência de um inteiro $p \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\forall z \in S \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad n > p \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Em particular, ter-se-á

$$\forall z \in S \qquad |f_{p+1}(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Uma vez que a função f_{p+1} é contínua em S, tem-se que

$$\exists \delta > 0 \ \forall z \in S \qquad |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f_{p+1}(z) - f_{p+1}(z_0)| < \varepsilon.$$

Então, para $z \in S$ tal que $|z - z_0| < \delta$, teremos

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_{p+1}(z)| + |f_{p+1}(z) - f_{p+1}(z_0)| + |f_{p+1}(z_0) - f(z_0)|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = \epsilon,$$

como pretendíamos provar.

(ii) Decorre imediatamente de (i). $\boxdot$

Existe uma forma de convergência que surge com frequência no contexto da análise complexa (e que se pode considerar como uma espécie de convergência "entre "a convergência pontual e uniforme). Trata-se da chamada convergência normal, que passamos a definir.

Definição 3.13. *Suponhamos que cada função de uma certa sucessão de funções $(f_n)_n$ está definida num subconjunto* **aberto** *S de $\mathbb{C}$. Dizemos que essa sucessão de funções converge* **normalmente** *para f em S se:*

- *$(f_n)_n$ converge pontualmente para f em S;*
- *$(f_n)_n$ converge uniformemente para f em cada subconjunto compacto de S.*

Este tipo de convergência é importante porque, tal como no caso da convergência uniforme, também é possível mostrar que o limite de uma sucessão de funções $(f_n)_n$ que convirja normalmente para uma função f num aberto S é uma função contínua em S; veja, e.g. [Pal91]. Naturalmente, o conceito de convergência normal aplica-se também a séries de funções.

Teorema 3.9 (Critério M de Weierstrass)**.** *Sejam $(f_n)_n$ uma sucessão de funções em S e $(M_n)_n$ uma sucessão de números reais, tais que:*

- $M_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$;
- $|f_n(z)| \leq M_n, \ \forall z \in S$;
- $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ *converge.*

Então, a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge absoluta e uniformemente em S.

Dem: Como $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge,

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}_0 \; \forall m, n \in \mathbb{N} \qquad m > n > p \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \epsilon.$$

Mas,

$$|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)| \leq \sum_{n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k.$$

Logo, temos

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}_0 \; \forall m, n \in \mathbb{N} \qquad m > n > p \Longrightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)| < \epsilon, \; \forall z \in S.$$

O resultado segue-se do Lema 3.2, notando que p é independente de z, para estabelecer a convergência uniforme. $\boxdot$

3.4 Séries de potências

De entre as diversas séries de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, desempenham um papel muito especial as chamadas *series de potências*, isto é, aquelas em que as funções envolvidas são potências da forma $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$. Mais precisamente, tem-se a seguinte definição.

Definição 3.14. *Seja* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Chama-se* **série de potências em torno de** z_0 *a uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad a_n \in \mathbb{C} \tag{3.5}$$

Nota:

- Como uma simples mudança de variável $Z = z - z_0$ permite transformar a série (3.5) numa série em torno da origem, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$, por uma questão de simplicidade limitaremos o nosso estudo a séries de potências deste último tipo. No entanto, o aluno deverá ter em atenção que os diversos resultados apresentados para esta séries devem ser "adaptados" para o caso de uma série em torno de outro ponto que não a origem.
- A notação $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ deve ser entendida como $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, isto é, quando $z = z_0$, a soma da série é a_0.

Começamos por introduzir um lema sobre o comportamento da séries de potências, no que diz respeito à convergência.

Lema 3.7. *Seja dada uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *e sejam* z_1, z_2 $(z_1 \neq 0)$ *dois pontos em* $\mathbb{C}$ *tais que a série converge para* $z = z_1$ *e diverge para* $z = z_2$*. Então:*

(i) a série converge absolutamente para todo o z *tal que* $|z| < |z_1|$*, convergindo uniformemente em qualquer disco fechado* $\overline{B}(0; r) = \{z : |z| \leq r\}$*, para* r *tal que* $r < |z_1|$*.*

(ii) a série diverge para todo o z *tal que* $|z| > |z_2|$*.*

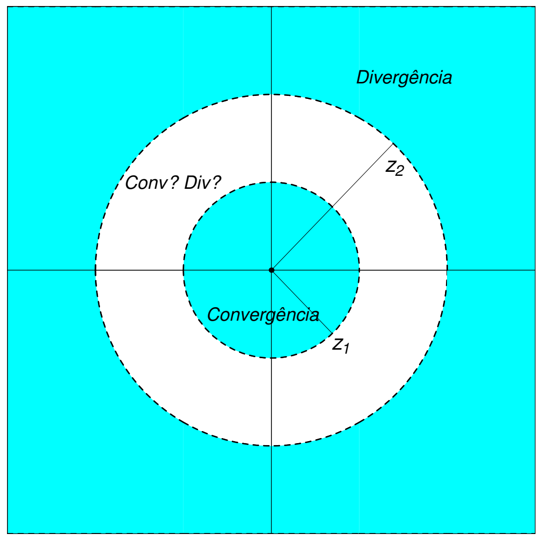


Figura 3.1: Região de convergência/divergência da série

Dem:

(i) Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_1}^n$ converge, terá de ser $\lim_{n\to\infty} |a_n {z_1}^n| = 0$, pelo que (uma vez que toda a sucessão (real) convergente é limitada) podemos concluir que existe $K > 0$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, se tem $|a_n {z_1}^n| \leq K$. Então

$$|a_n z^n| = |a_n {z_1}^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq K \left|\frac{z}{z_1}\right|^n .$$

Se z é tal que $|z| < |z_1|$, i. e. se $|z/z_1| < 1$, então a série real $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ converge e portanto, pelo Teorema 3.3, também $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge.

Além disso, sendo $r < |z_1|$ e $z \in \overline{B}(0; r)$, tem-se

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |a_n|r^n = |a_n r^n|.$$

Se designarmos por M_n as quantidades

$$M_n := |a_n r^n|$$

vemos que M_n são constantes não negativas tais que $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge (usando o resultado anterior, uma vez $z = r$ satisfaz $|z| < |z_1|$); aplicando o Critério M de Weierstrass, podemos então concluir que a série converge uniformemente.

(ii) É uma consequência imediata de *(i)*. $\boxdot$

Introduzimos agora a importante definição de raio (e círculo de convergência) de uma série de potências.

Definição 3.15. *Dada uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, chamamos* **raio de convergência** *dessa série ao valor dado por*

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{converge} \right\}. \tag{3.6}$$

Note-se que podemos ter $R = 0$ *ou* $R = +\infty$.

Sendo R *o raio de convergência da série dada, ao conjunto*

$$C_R = \{z : |z| = R\} \tag{3.7}$$

chamamos **círculo de convergência** *da série. Note-se que o círculo de convergência é uma circunferência centrada na origem, de raio igual ao raio de convergência* R*, a qual degenera num único ponto, no caso em que* $R = 0$*, ou em todo o plano complexo* $\mathbb{C}$*, se* $R = +\infty$.

Ao conjunto

$$\overline{B}(0; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$$

chamamos **disco de convergência** *da série.*

Segue-se imediatamente do Lema 3.7 que, se $R > 0$ é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, então a série converge (absolutamente) para todos os valores de z tais que

$|z| < R$, divergindo para os valores de z tais que $|z| > R$; para os complexos z pertencentes ao círculo de convergência, i.e., para z tais que $|z| = R$, à partida nada podemos concluir. Também, uma vez que qualquer conjunto compacto K contido em $B(0; R)$ está contido nalguma bola da forma $\overline{B}(0; r)$, com $r < R$, podemos concluir que a convergência da série é **normal** para z tal que $|z| < R$; isto implica, em particular, que a série define uma função contínua no interior do seu disco de convergência.

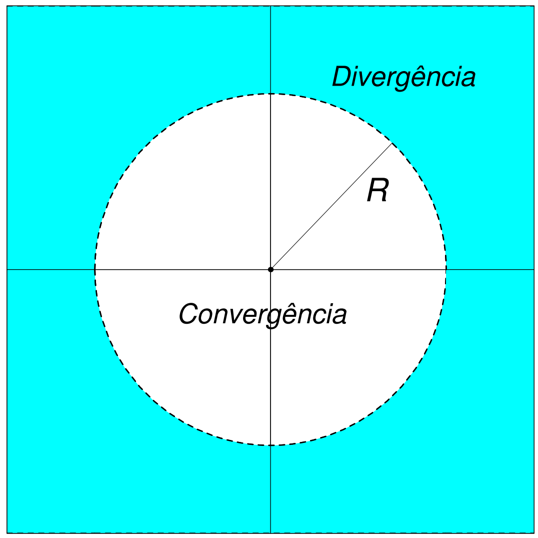


Figura 3.2: Raio de convergência de uma série de potências

O teorema seguinte fornece-nos formas úteis de calcular o raio de convergência de séries de potências.

Teorema 3.10. *Considere-se a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Então, o raio de convergência* R *da série pode ser calculado por qualquer das seguintes formas:*

(i)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \tag{3.8}$$

se o limite anterior existir (finito ou $+\infty$*).*

(ii)

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3.9}$$

se o limite envolvido na expressão anterior existir (finito ou $+\infty$).

(iii)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3.10}$$

Na determinação de R dada por (ii)-(iii), tomamos $R = +\infty$ se o limite do denominador for 0 e $R = 0$ se esse limite for $+\infty$.

Dem:

(i) Suponhamos então que existe $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (podendo ser finito ou $+\infty$). Então, existe também $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, tendo-se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}$, onde, naturalmente, se usa a convenção $\frac{1}{R} = 0$ se $R = +\infty$ e $\frac{1}{R} = +\infty$ se $R = 0$. Tem-se, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{1}{R}|z|.$$

Segue-se imediatamente do Critério da Razão (Teorema 3.4) que a série converge se $\frac{1}{R}|z| < 1$, isto é, se $|z| < R$ e diverge se $\frac{1}{R}|z| > 1$, ou seja, se $|z| > R$. Logo, por definição de raio de convergência, concluímos que (3.8) nos dá, de facto, o valor do raio de convergência da série.

A demonstração de *(ii)* e *(iii)* é feita de modo análogo, usando, respectivamente o Critério da Raiz e o Critério de Cauchy-Hadamard. $\boxdot$

Exemplo 3.4. *Considere-se a série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{n!}$. *Pelo Teorema 3.10, esta série tem raio de convergência*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty,$$

ou seja, a série é absolutamente convergente para todo o $z \in \mathbb{C}$. *A sua soma é* **por definição**, *(mantendo-se um paralelo com a análise real) a* **função exponencial complexa**, *designada por* $\exp z$ *ou* e^z, *isto é,*

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{n!}. \tag{3.11}$$

Exemplo 3.5. *As séries* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *têm também raio de convergência* $+\infty$. *As suas somas definem, respectivamente, a função* **co-seno** *e a função* **seno** *complexas, isto é,*

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.12}$$

$$\operatorname{sen} z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.13}$$

Os resultados estabelecidos até aqui permitem-nos trabalhar com séries de potências como se se tratasse de "polinómios infinitos", desde que as séries sejam absolutamente convergentes. Com efeito, sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ duas séries de potências com raios de convergência R_a e R_b, respectivamente e seja z tal que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Então, pelo Lema 3.5, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \tag{3.14}$$

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) z^n \tag{3.15}$$

e, pelo Lema 3.6, temos

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n).(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots a_n b_0) z^n. \tag{3.16}$$

Note-se que se substituirmos $\sum_{n=0}^{\infty}$ por uma soma finita, $\sum_{n=0}^{p}$, digamos, as fórmulas anteriores se convertem, respectivamente, nas fórmulas usuais da soma, produto por um escalar e produto de polinómios.

3.5 Exercícios

Exercício 3.1. Prove que:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+i} = 1$ *b)* $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ se e só se $|z| < 1$ *c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 i^n}{n^3 - 1} = 0$ *e)* $\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+3i} - \frac{in}{n+1}) = 1 - i$ *f)* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ não existe.

Nota: Para a última alínea é conveniente recordar a expressão das raízes de índice 8 de $z = 1$.

Exercício 3.2. Investigue a convergência/divergência das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n in}{n^2}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{n}$ *c)* $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n$

Exercício 3.3. Considere uma série de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 2 + i)^n$ e suponha que que ela é convergente para $z = 5 + 3i$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes (ou se não pode concluir acerca da veracidade ou falsidade da afirmação):

a) a série é divergente para $z = -1 - i$;

b) a série é divergente para $z = -3 - 6i$;

c) a série é convergente para $z = 3 + 2i$;

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 3$;

e) a série converge para $z = 5 - 5i$.

Exercício 3.4. Considere as seguintes séries de potências:

$$(i)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

a) Mostre que todas elas têm raio de convergência $R = 1$.

b) Mostre que a série considerada em (i) não converge em nenhum ponto do círculo de convergência e que a série dada em (ii) converge para qualquer ponto desse círculo.

c) Indique qual a soma da série (i) para z tal que $|z| < 1$.

d) Mostre que a série de (iii) converge em todos os pontos do círculo de convergência, com excepção do ponto $z = 1$.

Exercício 3.5. Determine o raio de convergência das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(2n)!}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^n}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{n+1} - \frac{6n^2}{2n+4}\right)^n z^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n z^n}{n!}$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+2^n}$ *i)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n z^n$

Exercício 3.6. Indique a região do plano onde as seguintes séries convergem:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^{2n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z-3)^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z-3)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n!}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} (z-1+i)^n$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n$

Exercício 3.7. Suponha que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência R $(R \neq 0, +\infty)$ e seja $C_R = \{z : |z| = R\}$. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações (justifique as verdadeiras e dê um contra-exemplo para a falsas) :

a) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge num ponto $z \in C_R$, então converge em todos os pontos de C_R;

b) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente num ponto $z \in C_R$, então converge absolutamente em todos os pontos de C_R;

c) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge em todos os pontos de C_R, excepto possivelmente num, então converge em todos os pontos de C_R;

d) O raio de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} a_n^2 z^{2n}$ é $\sqrt{R}$;

e) O raio de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ é R^2;

f) O raio de convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_n z^n$ é R.

Exercício 3.8. Suponha que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é tal que $a_{n+k} = a_n$ para todo o n $(k \in \mathbb{N}, \text{fixo})$. Prove que, para $|z| < 1$, a série converge para uma função racional $P(z)/Q(z)$ e que as raízes de Q estão sobre a circunferência unitária.

4. Derivação complexa

Analysis . . . would lose immensely in beauty and balance
and would be forced to add very hampering restrictions
to truths which would hold generally otherwise, if
. . . imaginary quantities were to be neglected.

G. Birkhoff

cit. em Isarel Kleiner
Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers (with a Moral).

4.1 Resultados básicos

Definição 4.1. *Sejam $f: S \to \mathbb{C}$ uma aplicação e $z_0 \in S \cap S'$. Diz-se que f* **é $\mathbb{C}$-derivável em** z_0 *(ou simplesmente* **derivável em** z_0*)*[1] *se existir (e for finito) o seguinte limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{4.1}$$

Se f for derivável em z_0, ao número complexo dado por (4.1) chamamos **derivada de f em** z_0 *e denotamo-lo por $f'(z_0)$. Se f for derivável em todo o ponto $z \in S$, dizemos que f é derivável em S.*

[1] Geralmente, diremos apenas que f é derivável (ou diferenciável) em z_0; apenas quando pretendermos enfatizar que se trata deste conceito (forte, como veremos) de derivabilidade, distinto do de diferenciabilidade como função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, escrevermos que f é $\mathbb{C}$-derivável.

Se f for derivável em S, podemos definir uma função

$$\begin{aligned} f' \colon \quad S &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f'(z) \end{aligned}$$

à qual chamaremos derivada de f. Se f' for contínua, diz-se que f é continuamente derivável. Se f' for derivável com derivada contínua, então f é dita duas vezes continuamente derivável; uma função derivável, tal que cada derivada sucessiva é novamente derivável, diz-se infinitamente derivável. Usaremos as notações usuais f'', f''', $\ldots, f^{(n)}$ para denotar as derivadas de ordem superior de f.

Nota: Se $h \neq 0$ for tal que $z_0 + h \in S$, fazendo a mudança de variável $z = z_0 + h$, tem-se a seguinte expressão alternativa para o cálculo da derivada de f em z_0:

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

É preciso ter em atenção que, neste caso, $h \in \mathbb{C}$, pelo que, contrariamente ao caso real, não há apenas que considerar "dois sentidos" quando $h \to 0$.

O teorema seguinte é totalmente análogo ao caso real.

Teorema 4.1. *Se $f\colon S \to \mathbb{C}$ for derivável em $z_0 \in S \cap S'$, então f é contínua em z_0.*

Dem: Para $z \neq z_0$, tem-se

$$f(z) = \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) (z - z_0) + f(z_0)$$

Uma vez que existe $\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right)$, os resultados sobre álgebra de limites garantem-nos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, o que mostra que f é, de facto, contínua em z_0. $\boxdot$

Nota: É importante salientar que o recíproco do teorema anterior não se verifica, tal como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 4.1. *Considere-se a função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \overline{z}$, e seja z_0 um ponto arbitrário de $\mathbb{C}$. Examinemos o comportamento do quociente*

$$\frac{f(z_0+h)+f(z_0)}{h}$$

quando $h \to 0$, primeiramente por valores reais, e depois por valores imaginários puros. Temos,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{z_0+h}-\overline{z_0}}{\overline{h}} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{h}{h} = 1$$

e

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+ik)-f(z_0)}{ik} = \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{z_0+ik}-\overline{z_0}}{ik} = \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}} \frac{-ik}{ik} = -1.$$

Segue-se, portanto (veja o Lema 2.1), que não existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$, ou seja, que a função f não admite derivada em z_0.
Concluímos, assim, que função $f(z) = \overline{z}$ não admite derivada em nenhum ponto de $\mathbb{C}$; no entanto, como vimos anteriormente, esta função é contínua em todo o plano complexo.

Exemplo 4.2. *Facilmente se prova, usando a definição, que se f for uma função constante, então f é derivável em $\mathbb{C}$ e*

$$f'(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Também, sendo Id a função identidade, tem-se

$$Id'(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Os resultados enunciados nos dois teoremas seguinte são totalmente análogos a resultados estabelecidos em análise real, podendo a sua demonstração decalcar-se desse caso.

Teorema 4.2. *Se $f\colon S \to \mathbb{C}$ e $g\colon S \to \mathbb{C}$ forem deriváveis em $z_0 \in S \cap S'$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, são também deriváveis em z_0 as funções λf, $f \pm g$, $f.g$ e f/g (se $g(z_0) \neq 0$, no último caso), tendo-se:*

(i) $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$.

(ii) $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$.

(iii) $(f.g)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$.

(iv) $(f/g)'(z_0) = [g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)]/(g(z_0))^2$.

Teorema 4.3 (Regra da cadeia)**.** *Sejam $f\colon S \to \mathbb{C}$ e $g\colon T \to \mathbb{C}$,com $f(S) \subseteq T$. Se f é derivável em z_0 e g é derivável em $w_0 = f(z_0)$, então $g \circ f$ é derivável em z_0, tendo-se*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0).f'(z_0).$$

Nota: No teorema anterior, estamos a assumir implicitamente que $w_0 = f(z_0) \in T \cap T'$.

A partir dos resultados contidos no Exemplo 4.2 e no Teorema 4.2, é imediato concluir que, se P é uma função polinomial definida por

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n,$$

então P é derivável, tendo-se

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + n a_n z^{n-1}.$$

De modo análogo, se R é uma função racional,

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

com P e Q polinómios, então R é derivável em todos os pontos do seu domínio, isto é, em todos os pontos tais que $Q(z) \neq 0$, podendo a sua derivada calcular-se facilmente, usando o conhecimento sobre derivadas de polinómios:

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}.$$

Exemplo 4.3. *Damos agora um exemplo muito simples de utilização do Mathematica no cálculo de derivadas, apenas com o objectivo de recordar a sintaxe utilizada.*

```
F[z_] = f[z] / g[z];
Together[F'[z]]
```

$$\frac{g[z]\, f'[z] - f[z]\, g'[z]}{g[z]^2}$$

```
Clear[f, g, F];
f[z_] = z^3 + 2 z^2 + 5 z + 1;
f'[z]
```

$5 + 4\,z + 3\,z^2$

```
f''[z]
```

$4 + 6\,z$

4.2 As equações de Cauchy-Riemann

Nesta secção, vamos mostrar que a existência de derivada de uma função f num ponto é, em certo sentido, uma exigência "bastante mais forte" do que em $\mathbb{R}$.

Denotemos por $u(x,y)$ a função Re $f(x,y)$ e por $v(x,y)$ a função Im $f(x,y)$, isto é, seja

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

onde $z = x + iy$. O teorema seguinte mostra que a existência de derivada de f impõe restrições nas derivadas parciais das duas funções (reais de duas variáveis reais) u e v. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$, então as derivadas parciais u_x,v_x, u_y e v_y existem em (x_0, y_0) e satisfazem as chamadas* **equações de Cauchy-Riemann**:

$$\boxed{\begin{aligned} u_x(x_0,y_0) &= v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) &= -u_y(x_0,y_0). \end{aligned}} \tag{4.2}$$

Dem: Se $f'(z_0)$ existe, então existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$, o qual terá de ser independente da forma como h tende para zero; recorde, de novo, o Lema 2.1. Seja h real e calculemos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h,y_0)+iv(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h}+i\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}\end{aligned}$$

A existência de $f'(z_0)$ garante-nos, então, a existência dos dois limites envolvidos na última expressão, os quais não são mais do que as derivadas parciais $u_x(x_0,y_0)$ e $v_x(x_0,y_0)$, tendo-se, além disso, que

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) \tag{4.3}$$

Por outro lado, sendo k real, temos também

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}\frac{f(z_0+ik)-f(z_0)}{ik} &= \lim_{k\to 0}\frac{u(x_0,y_0+k)+iv(x_0,y_0+k)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{ik}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{u(x_0,y_0+k)-u(x_0,y_0)}{ik}+i\lim_{k\to 0}\frac{v(x_0,y_0+k)-v(x_0,y_0)}{ik}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{v(x_0,y_0+k)-v(x_0,y_0)}{k}-i\lim_{k\to 0}\frac{u(x_0,y_0+k)-u(x_0,y_0)}{k},\end{aligned}$$

de onde se deduz a existência das derivadas parciais $v_y(x_0,y_0)$ e $u_y(x_0,y_0)$ e a seguinte expressão para a derivada de f em z_0:

$$f'(z_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0). \tag{4.4}$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (4.3) e (4.4), tem-se

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \qquad \text{e} \qquad v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0),$$

o que conclui a demonstração. $\boxdot$

Nota:

- O teorema anterior mostra que, se existir a derivada de $f=u+iv$ em $z_0=x_0+iy_0$, essa derivada pode ser obtida por qualquer das expressões (4.3) ou (4.4), isto é,

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

ou

$$f'(z_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0).$$

- A satisfação das equações de Cauchy-Riemann é uma condição **necessária** para a existência de derivada num determinado ponto; assim, se elas não se verificarem, conclui-se de imediato a não existência de derivada nesse ponto. No entanto, elas **não são**, por si sós, **suficientes** para garantir a existência de derivada, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 4.4. *Seja*

$$f(x+iy) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0; \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0. \end{cases}$$

Para esta função, as derivadas parciais de u e v existem e são nulas na origem, donde, são satisfeitas, nesse ponto, as equações de Cauchy-Riemann. No entanto, f não é derivável na origem (com efeito, f não é sequer contínua na origem).

Mostraremos no entanto que, se as derivadas parciais de u e v existirem, **forem contínuas** e satisfazerem as equações de Cauchy-Riemann num certo ponto, então a função $f = u+iv$ é derivável nesse ponto.

Teorema 4.5. *Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função complexa definida numa certa bola $B(z_0;\epsilon)$ centrada num ponto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ e suponhamos que as derivadas parciais $u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ existem, são contínuas em $B(z_0;\epsilon)$ e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $z_0 = (x_0, y_0)$. Então f é derivável em z_0 e*

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0).$$

Dem: Seja $H = h + ik$ um complexo tal que $z_0 + H \in B(z_0;\epsilon)$. Então, tem-se

$$\begin{aligned} f(z_0+H) - f(z_0) &= u(x_0+h, y_0+k) + iv(x_0+h, y_0+k) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0) \\ &= u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0,y_0) + iv(x_0+h, y_0+k) - v(x_0,y_0) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Comecemos por analisar a diferença $u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0,y_0)$. Somando e subtraindo $u(x_0, y_0+k)$, vem

$$u(x_0+h,y_0+k) - u(x_0,y_0) = u(x_0+h,y_0+k) - u(x_0,y_0+k) + u(x_0,y_0+k) - u(x_0,y_0)$$

Como as derivadas parciais u_x e u_y existem, o Teorema do Valor Médio (para funções reais de duas variáveis reais) garante que

$$u(x_0+h,y_0+k) - u(x_0,y_0) = hu_x(x_0+\theta h, y_0+k) + ku_y(x_0, y_0+\theta' k)$$

para certos valores $0 < \theta, \theta' < 1$. Por outro lado, a continuidade das derivadas parciais u_x e u_y no ponto (x_0, y_0) implica que

$$\begin{aligned} u_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) - u_x(x_0, y_0) &= \mu_1(h, k) \\ u_y(x_0, y_0 + \theta' k) - u_y(x_0, y_0) &= \nu_1(h, k) \end{aligned}$$

onde $\mu_1(h, k) \to 0$ e $\nu_1(h, k) \to 0$ quando $h, k \to 0$. Assim sendo, temos que

$$u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = h\,(u_x + \mu_1) + k\,(u_y + \nu_1) \tag{4.6}$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto (x_0, y_0) e $\mu_1, \nu_1 \to 0$ quando $h, k \to 0$ De modo totalmente análogo se prova que

$$v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = h\,(v_x + \mu_2) + k\,(v_y + \nu_2) \tag{4.7}$$

onde $\mu_2 = \mu_2(h, k)$ e $\nu_2 = \nu_2(h, k)$ são funções que tendem para zero quando quando $h, k \to 0$. Retomando a equação (4.5), temos

$$\begin{aligned} f(z_0 + H) - f(z_0) = h\,(u_x + \mu_1) + k\,(u_y + \nu_1) \\ + ih\,(v_x + \mu_2) + ik\,(v_y + \nu_2)\,. \end{aligned}$$

Usando as equações de Cauchy–Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, obtém-se

$$f(z_0 + H) - f(z_0) = (h + ik)(u_x + iv_x) + h\mu_1 + k\nu_1 + i(h\mu_2 + k\nu_2)$$

Dividindo por $H = h + ik$ e calculando o limite quando $H \to 0$, vem, tendo em conta que $|h| \leq |H|$ e $|k| \leq |H|$,

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(z_0 + H) - f(z_0)}{H} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

o que estabelece o resultado pretendido. $\boxdot$

Exemplo 4.5. *O exemplo seguinte (estudado com a ajuda do Mathematica) mostra que a função*

$$f(z) = f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

é derivável em todo o plano complexo e que a sua derivada é dada por

$$f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy.$$

Além disso, vemos também que $f(z) = z^3$ *e que a expressão obtida para a derivada é correspondente a* $3z^2$.

```
u[x_, y_] = x^3 - 3 x y^2;
v[x_, y] = 3 x^2 y - y^3;
∂x u[x, y]
∂y v[x, y]
```

$3\,x^2 - 3\,y^2$

$3\,x^2 - 3\,y^2$

```
∂y u[x, y]
-∂x v[x, y]
```

$-6\,x\,y$

$-6\,x\,y$

Nota: *É imediato verificar que as derivadas parciais são contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em qualquer ponto do plano complexo, pelo que* f *é derivável em qualquer ponto de* $\mathbb{C}$.

```
fderivada = ∂x u[x, y] + ⅈ ∂x v[x, y]
```

$3\,x^2 + 6\,i\,x\,y - 3\,y^2$

```
Simplify[fderivada /.
  {x → (z + Conjugate[z]) / 2, y → (z - Conjugate[z]) / (2 ⅈ)}]
```

$3\,z^2$

```
fz = u[x, y] + ⅈ v[x, y];
Simplify[
 fz /. {x → (z + Conjugate[z]) / 2, y → (z - Conjugate[z]) / (2 ⅈ)}]
```

z^3

Raramente estaremos interessados em funções que admitem derivada apenas num ponto z_0. De facto, são particularmente importantes as funções que admitem derivada em todos os pontos de uma bola centrada num determinado ponto.

Definição 4.2. *Uma função f diz-se* **analítica num ponto** z_0*, se existir $\epsilon > 0$ tal que $f'(z)$ existe para todo o $z \in B(z_0; \epsilon)$.*

Se f for analítica em todos os pontos de um conjunto $S \subseteq \mathbb{C}$, diremos que f é **analítica em** S*.*

Uma função analítica em todo o plano complexo $\mathbb{C}$ é dita **inteira**.

4.3 Conjuntos conexos e derivabilidade

Teorema 4.6. *Sejam $\emptyset \neq D$ um domínio (isto é, um conjunto aberto e conexo) em $\mathbb{C}$ e $f\colon D \to \mathbb{C}$ uma função analítica em D. Se $f'(z) = 0$ para todo o $z \in D$, então f é constante em D.*

Dem: Temos que

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$

e, portanto, a condição $f'(z) = 0$, para $z \in D$, implica que tenhamos

$$u_x = v_x = v_y = u_y = 0,$$

em todos os pontos de D. Seja L um qualquer segmento de recta horizontal contido em D, isto é, seja L um conjunto de pontos da forma

$$L = \{w \in D : \; w = x + iy_0, \quad a \leq x \leq b\}.$$

Consideremos a função $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(x) = u(x, y_0)$. Então, $\phi'(x) = u_x(x, y_0) = 0$, para $a \leq x \leq b$, e portanto segue-se que ϕ é constante em $[a, b]$, ou seja, que u é constante em L. De modo análogo se prova que u e v são constantes em qualquer segmento de recta horizontal ou vertical contido em D. Como dois quaisquer pontos de D podem ser ligados por uma poligonal formada por segmentos paralelos aos eixos coordenados (porque D é aberto e conexo), segue-se que $f = u + iv$ é constante em D. $\boxdot$

Temos também o seguinte teorema.

Teorema 4.7. *Seja $f = u + iv$ analítica num domínio D. Se se verificar qualquer uma das condições (i)–(iii) seguintes*

(i) u é constante em D,

(ii) v é constante em D,

(iii) $|f(z)|$ é constante em D,

podemos garantir que f é constante em D.

Dem: A demonstração passa por provar que qualquer das condições (*i*)-(*iii*) implica $f'(z) = 0$ em D, usando-se, então, o Teorema 4.6; os pormenores ficam ao cuidado dos alunos.

4.4 Funções harmónicas

Definição 4.3. *Seja $\phi(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais definida num certo domínio $D \subseteq \mathbb{C}$. Dizemos que ϕ é uma* **função harmónica** *em D, se ϕ e todas as suas derivadas parciais até à segunda ordem, ϕ_x, ϕ_y,ϕ_{xx},ϕ_{xy},ϕ_{yx} e ϕ_{yy} existirem e forem contínuas em D e se, além disso, ϕ satisfizer a chamada* **equação de Laplace** *em D, isto é, tivermos*

$$\Delta\phi := \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad \text{em } D. \tag{4.8}$$

As funções harmónicas desempenham um papel importante em diversas áreas de matemática, física e engenharia. O teorema seguinte relaciona as funções analíticas com funções harmónicas.

Teorema 4.8. *Se uma função $f = u + iv$ é analítica num certo domínio D, então as suas partes real e imaginária u e v são funções harmónicas em D.*

Dem: Para demonstrar o teorema precisamos (por agora) de assumir um resultado (o qual será demonstrado posteriormente) que afirma que, se $f = u + iv$ for analítica em D, então *todas* as derivadas parciais de u e v existem e são contínuas em D.

Aceitando então este resultado[2], resta-nos demonstrar que u e v satisfazem a equação de Laplace, ou seja, que temos

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{e} \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

[2]Ou acrescentando às hipóteses do teorema a existência e continuidade das derivadas parciais de u e de v até à segunda ordem.

Como $f = u + iv$ é analítica em D, então as derivadas parciais u_x, u_y, v_x e v_y satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, ou seja, tem-se

$$u_x = v_y \qquad \text{e} \qquad u_y = -v_x.$$

Derivando ambos os membros da primeira equação em ordem a x, obtém-se

$$u_{xx} = v_{yx}$$

Por outro lado, se derivarmos a segunda equação em ordem a y, vem

$$u_{yy} = -v_{xy}.$$

Como as derivadas parciais mistas v_{xy} e v_{yx} são contínuas, ter-se-á (por um resultado bem conhecido da análise real) $v_{xy} = v_{yx}$, donde se obtém de imediato

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = v_{xy} - v_{xy} = 0.$$

Mostrámos, assim, que u é harmónica em D. A demonstração de de v também é harmónica é feita de modo análogo. $\boxdot$

Definição 4.4. *Seja $u = u(x, y)$ uma função (real de duas variáveis reais) harmónica num certo domínio D. Se $v = v(x, y)$ for tal que $f = u + iv$ é analítica em D, dizemos que v é uma* **harmónica conjugada** *de u em D.*

Teorema 4.9 (Construção de uma harmónica conjugada)**.** *Seja $u(x, y)$ uma função harmónica num disco $D = B(z_0; \epsilon)$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Então existe uma harmónica conjugada v de u nesse disco.*

Dem: Antes de mais, notemos que é fácil de verificar que, dado qualquer ponto $z = (x, y) \in B(z_0; \epsilon)$, quer o segmento de recta vertical que une $z_0 = (x_0, y_0)$ a $w_0 = (x_0, y)$, quer o segmento horizontal que une $w_0 = (x_0, y)$ a $z = (x, y)$, estão contidos em $B(z_0; \epsilon)$; veja Figura 4.1.

Suponhamos, para já, que existe uma harmónica conjugada v de u e procuremos determinar qual a "forma" que ela terá de ter.

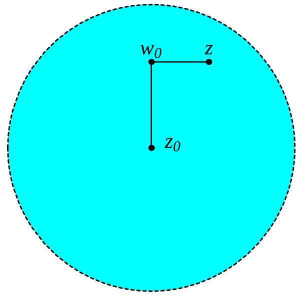


Figura 4.1: Figura do Teorema 4.9

Se v for uma harmónica conjugada de u, então $f = u + iv$ será analítica, pelo que serão satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ em $D = B(z_0; \epsilon)$. Integrando a equação $v_x = -u_y$ em ordem a x, obtém-se

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} u_y(t, y)dt + \phi(y), \tag{4.9}$$

onde ϕ é uma função de y (continuamente diferenciável). Como $v_y = u_x$, vem

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} u_y(t, y)dt + \phi'(y) \\ &= -\int_{x_0}^{x} u_{yy}(t, y)dt + \phi'(y) \end{aligned}$$

Como u é harmónica em D, temos que $-u_{yy} = u_{xx}$, donde,

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -\int_{x_0}^{x} u_{yy}(t, y)dt + \phi'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} u_{xx}(t, y)dt + \phi'(y) \\ &= u_x(x, y) - u_x(x_0, y) + \phi'(y). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\phi'(y) = u_x(x_0, y).$$

Se integramos esta última equação em ordem a y, obtemos

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x_0, t)dt + c,$$

onde $c \in \mathbb{C}$. Substituindo esta expressão de $\phi(y)$ em (4.9), vem

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} u_y(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} u_x(x_0,t)dt + c. \tag{4.10}$$

Acabámos de mostrar que, se v for uma harmónica conjugada de u, então v terá de ser dada pela fórmula (4.10). Resta verificar que a função v definida por essa fórmula é, de facto, uma harmónica conjugada de u. É fácil de verificar que v dada por (4.10) tem derivadas parciais contínuas e que, além disso, as derivadas parciais de u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemman. A título de exemplo, mostremos que $u_x = v_y$:

$$\begin{aligned}
v_y(x,y) &= -\int_{x_0}^{x} u_{yy}(t,y)dt + \frac{d}{dy}\int_{y_0}^{y} u_x(x_0,t)dt \\
&= \int_{x_0}^{x} u_{xx}(t,y)dt + u_x(x_0,y) \\
&= u_x(x,y) - u_x(x_0,y) + u(x_0,y) = u_x(x,y)
\end{aligned}$$

como pretendíamos mostrar. $\boxdot$

Nota:

- Uma análise da demonstração do teorema anterior mostra que ele é válido em qualquer domínio D que tenha a seguinte propriedade: existe um ponto $z_0 \in D$ tal que, dado qualquer outro ponto $z = (x,y) \in D$, quer o segmento vertical que une $z_0 = (x_0,y_0)$ a $w_0 = (x_0,y)$, quer o segmento horizontal que une $w_0 = (x_0,y)$ a $z = (x,y)$, estão contidos em D; por exemplo, D pode ser um rectângulo com lados paralelos aos eixos.

- Se a função u for harmónica em todo o plano complexo, então o ponto $z_0 = (x_0,y_0)$ pode ser escolhido arbitrariamente e é fácil de ver que uma harmónica conjugada de u pode obter-se simplesmente pela fórmula

$$v(x,y) \quad = -\int u_y(x,y)dx + \underbrace{\int \left(u_x(x,y) + \frac{\partial}{\partial_y}\int u_y(x,y)dx \right) dy}_{\phi(y)} . \tag{4.11}$$

Exemplo 4.6. *Mostrar que a função $u(x,y) = e^x \cos y$ é harmónica em $\mathbb{C}$ e encontrar uma sua harmónica conjugada. Temos*

$$u_x(x,y) = e^x \cos y, \qquad u_y(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y, \qquad u_{xx}(x,y) = e^x \cos y,$$

$$u_{xy}(x,y) = u_{yx}(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y \qquad \text{e} \qquad u_{yy}(x,y) = -e^x \cos y.$$

Todas as derivadas parciais anteriores são contínuas em $\mathbb{C}$ e tem-se

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0,$$

pelo que u é, de facto, harmónica em $\mathbb{C}$. Procuremos, então, uma sua harmónica conjugada, sem aplicar directamente a fórmula (4.11), mas sim seguindo os passos do teorema.
Como $v_x(x,y) = -u_y(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, segue-se, integrando em ordem a x, que

$$v(x,y) = \int e^x \operatorname{sen} y \, dx + \phi(y) = e^x \operatorname{sen} y + \phi(y).$$

Vejamos, então, qual terá de ser a expressão de $\phi(y)$.
Derivando a expressão anterior em ordem a a y (isto é, calculando v_y) obtém-se

$$v_y(x,y) = e^x \cos y + \phi'(y).$$

Igualando esta última expressão à expressão de u_x (porque u_x terá de ser igual a v_y), vem

$$e^x \cos y + \phi'(y) = e^x \cos y,$$

donde resulta $\phi'(y) = 0$, o que implica que $\phi(y) = c, \quad c \in \mathbb{C}$.
Então, as harmónicas conjugadas de u serão da forma

$$v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Em particular, para $c = 0$, obtém-se a seguinte harmónica conjugada

$$v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Assim sendo, podemos concluir que a função

$$f(z) = f(x+iy) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

é analítica em $\mathbb{C}$.

Exemplo 4.7. *Ilustramos, agora, como poderemos usar o Mathematica para encontrar uma harmónica conjugada. Neste caso,* $u(x, y) = x^2 - y^2$ *e concluímos que uma sua harmónica conjugada é* $v(x, y) = 2xy$. *Tal não é de estranhar, uma vez que* $x^2 - y^2$ *é a parte real da função* $f(z) = z^2$ *e* $2xy$ *a sua parte imaginária.*

```
u[x_, y_] = x^2 - y^2;
ϕ[y_] = ∫(∂x u[x, y] + ∂y (∫∂y u[x, y] ⅆx)) ⅆy;
v[x_, y_] = Simplify[-∫∂y u[x, y] ⅆx + ϕ[y]]
```

2 x y

4.5 Derivação de séries de potências

Já referimos que que a derivada de um polinómio $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ é dada por $P'(z) = a_1 + \ldots + n a_n z^{n-1}$. Isto sugere que, para uma uma função definida como soma de uma série de potências, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, "deva" ser $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Se tal acontecer, dizemos que a série pode ser derivada termo a termo. Os dois resultados seguintes provam que a derivação termo a termo de uma série de potências é possível para z no interior do seu disco de convergência.

Começamos por introduzir o seguinte lema.

Lema 4.1. *Se a série* $\sum_{n=0}^{n} a_n z^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$, *então o raio de convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ *é também igual a* R.

Dem: Comecemos por notar que a multiplicação por z de uma série de potências não afecta o seu raio de convergência (justifique). Assim sendo, o lema ficará demonstrado se provarmos que o raio de convergência da série $z \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$ é R.

Seja, então, R' o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$. Pelo Teorema 3.10, tem-se

$$R' = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}}.$$

Mas,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|} \right) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

uma vez que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Concluímos, assim que

$$R' = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

que é, precisamente, a expressão do raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. $\boxdot$

Teorema 4.10. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$. Então, a função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é derivável para $z \in B(0; R)$ e tem-se*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{4.12}$$

Dem: Pelo lema anterior sabemos que $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ é absolutamente convergente para $|z| < R$. Temos de mostrar que, para $|z_0| < R$,

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) = g(z_0),$$

ou seja, que

$$\lim_{z\to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right) = 0.$$

Assim, pretendemos mostrar que, dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, é possível encontrar $\delta > 0$ tal que, se $z \in B(0, R)$ e $0 < |z - z_0| < \delta$, então

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| < \epsilon.$$

Mas, pelo Lema 3.5, vem

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n a_n z_0^{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, fixemos r tal que $|z_0| < r < R$. Então, a série é $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$ é absolutamente convergente e, portanto, existe $N = N(\epsilon)$, tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n|a_n|r^{n-1} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |n a_n r^{n-1}| < \epsilon/4.$$

Consideremos a série que define $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)$ "partida"em duas partes Σ_1 e Σ_2, como se indica:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}\right) \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}\right)}_{\Sigma_1} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}\right)}_{\Sigma_2} \end{aligned}$$

Como $|z_0| < r$, então existe r' tal que $|z_0| < r' < r$. Seja $\delta_1 = r - r'$. Então, para z tal que $0 < |z - z_0| < \delta_1$, vem $|z| \leq |z - z_0| + |z_0| < r - r' + r' = r$, donde

$$|\Sigma_2| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| 2\, n\, r^{n-1} < \epsilon/2. \tag{4.13}$$

Como Σ_1 é um polinómio em z, é imediato concluir que $\Sigma_1 \to 0$ quando $z \to 0$. Então, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para $0 < |z - z_0| < \delta_2$, se tem

$$|\Sigma_1| < \epsilon/2. \tag{4.14}$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e z tal que $0 < |z - z_0| < \delta$, verificam-se simultaneamente (4.13) e (4.14), pelo que temos

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) \right| = |\Sigma_1 + \Sigma_2| \leq |\Sigma_1| + |\Sigma_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

como desejávamos provar. $\boxdot$

Corolário 4.1. *Todas as derivadas de uma série de potências $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ existem, para z no interior do disco de convergência da série, e*

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Dem: O resultado estabelece-se facilmente por indução sobre k. $\boxdot$

Substituindo z por $z - z_0$ no corolário anterior, concluímos que, se a série de potências $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tem raio de convergência $R > 0$, então para z tal que $|z-z_0| < R$, todas as derivadas de f existem, tendo-se

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}. \tag{4.15}$$

Fazendo $z = z_0$, obtém-se $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$. Demonstrámos assim o seguinte corolário:

Corolário 4.2. *Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tem raio de convergência $R > 0$, então*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

e podemos expressar f como uma série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \tag{4.16}$$

para $|z - z_0| < R$.

Nota: Os resultados anteriores mostram que, se uma função for definida por uma série de potências em torno de um ponto $z = z_0$ (a qual tenha raio de convergência $R > 0$), então essa função é **analítica** no ponto z_0 e infinitamente derivável em $B(z_0; R)$. Em particular, se f for definida por uma série de potências cujo raio seja $R = +\infty$, então f é uma função inteira (e todas as derivadas de f existem para $z \in \mathbb{C}$).

4.6 Exercícios

Exercício 4.1.

a) Mostre que a função $f(z) = |z|$ é contínua em todo o plano complexo $\mathbb{C}$, mas não é derivável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

b) Mostre que a função $g(z) = |z|^2$ só admite derivada para $z = 0$. Que conclui quanto à analiticidade de g?

Exercício 4.2. Mostre que as funções $f(z) = \text{Re}(z)$ e $g(z) = \text{Im}(z)$ não são analíticas em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

Exercício 4.3. Considere a função $f(z) = f(x + iy) = x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2y)$.

a) Determine os pontos do plano onde f admite derivada.

b) Diga, justificando, se f é analítica em algum ponto de $\mathbb{C}$.

Exercício 4.4. Determine o conjunto de pontos em que as seguintes funções são deriváveis e calcule as respectivas derivadas:

a) $f(z) = (z + 1)^4$ *b)* $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

c) $f(z) = \left(\dfrac{1}{z - i}\right)^4$ *d)* $f(z) = \dfrac{1}{(z^3 - i)(z^2 + 4)}$

e) $f(z) = x^2 + iy^2$ *f)* $f(z) = z\,\text{Im}\,z$

Exercício 4.5. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(z) = \dfrac{(\overline{z})^2}{z} \quad , \quad z \neq 0. \end{cases}$$

Mostre que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$, mas que não existe derivada de f nesse ponto.

Exercício 4.6. Demonstre o Teorema 4.7.

Exercício 4.7. Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e suponha que pretendemos usar a representação polar de $z = r\,\text{cis}\,\theta$:

$$f(z) = f(r\,\text{cis}\,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) + iv(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = U(r,\theta) + iV(r,\theta).$$

Suponha que f é derivável em $z_0 = r_0\,\text{cis}\,\theta_0$ $(z_0 \neq 0)$. Mostre que:

a) As derivadas parciais de U e V estão relacionadas com as derivadas parciais de u e v do seguinte modo:

$$U_r = u_x\cos\theta + u_y\,\text{sen}\,\theta \qquad U_\theta = -u_x r\,\text{sen}\,\theta + u_y r\cos\theta$$
$$V_r = v_x\cos\theta + v_y\,\text{sen}\,\theta \qquad V_\theta = -v_x r\,\text{sen}\,\theta + v_y r\cos\theta$$

b) As funções U e V satisfazem:

$$U_r(r_0,\theta_0) = \frac{1}{r_0}V_\theta(r_0,\theta_0), \qquad V_r(r_0,\theta_0) = \frac{-1}{r_0}U_\theta(r_0,\theta_0)$$

(As equações anteriores são as chamadas **equações de Cauchy-Riemann na forma polar**).

c) A derivada $f'(z_0)$ pode ser dada por

$$f'(z_0) = f'(r_0\,\text{cis}\,\theta_0) = \text{cis}(-\theta_0)\left[U_r(r_0,\theta_0) + iV_r(r_0,\theta_0)\right]$$

ou

$$f'(z_0) = f'(r_0\,\text{cis}\,\theta_0) = \frac{1}{r_0}\text{cis}(-\theta_0)\left[V_\theta(r_0,\theta_0) - iU_\theta(r_0,\theta_0)\right].$$

Exercício 4.8. Mostre que cada uma das funções seguintes é harmónica em $\mathbb{C}$ e encontre, para cada uma delas, uma harmónica conjugada.

a) $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ *b)* $u(x,y) = \text{senh}\,x\,\text{sen}\,y$.

Exercício 4.9. Determine o valor da constante k para o qual a função $u(x,y) = x^2 + ky^2$ é harmónica em $\mathbb{C}$. Para esse valor de k encontre uma harmónica conjugada $v(x,y)$ de u tal que $v(0,0) = 2$.

5. Funções elementares

After exponential quantities, the circular functions, sine and cosine, should be considered because they arise when imaginary quantities are involved in the exponential.

Leonhard Euler

cit. em Reinhold Remmert, *Theory of Complex Functions*.

5.1 Função exponencial

Como vimos no Exemplo 3.4, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge para todo o $z \in \mathbb{C}$, definindo, portanto, uma função analítica em $\mathbb{C}$. É a essa função que chamamos exponencial complexa. Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 5.1. *Chama-se* **exponencial complexa** *e denota-se por* exp *a função definida, para todo o* $z \in \mathbb{C}$ *por*

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{5.1}$$

Nota: Por analogia com o caso real, é frequente usar-se a notação e^z para denotar $\exp z$.

Como sabemos, uma série de potências pode ser derivada termo a termo para z no interior do seu disco de convergência. Assim sendo, a derivada da função exponencial poderá obter-se derivando termo a termo a série (5.1), ou seja, tem-se

$$\frac{d}{dz} \exp z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Vemos, então, que tal como em $\mathbb{R}$ a derivada da função exponencial é igual a ela própria, ou seja,

$$\frac{d}{dz} \exp z = \exp z. \tag{5.2}$$

O teorema que se segue enuncia as principais propriedades da exponencial complexa (algumas das quais são totalmente análogas ao caso real).

Teorema 5.1 (Propriedades da exponencial)**.** *Para quaisquer* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*, tem-se:*

(i) $e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

(ii) $e^z \neq 0$;

(iii) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;

(iv) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$;

Dem:

(*i*) Considere-se a função $f(z) = e^z e^{(c-z)}$, com $c \in \mathbb{C}$ (fixo). Derivando, temos (usando as propriedades da derivação e a expressão da derivada de e^z):

$$f'(z) = e^z\, e^{(c-z)} + e^z\, (-e^{(c-z)}) = 0, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Pelo Teorema 4.6, segue-se que $f(z)$ é constante em $\mathbb{C}$, donde $f(z) = f(0) = e^c$, para todo o $z \in \mathbb{C}$. Logo, temos

$$e^z\, e^{(c-z)} = e^c, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

O resultado obtém-se fazendo $c = z_1 + z_2$ e $z = z_1$.

(*ii*) Suponhamos que existia $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{z_0} = 0$; então, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, seria $e^z = e^{(z-z_0)+z_0} = e^{z-z_0}\, e^{z_0} = 0$, ou seja a função exponencial seria identicamente nula; mas, tal não acontece, uma vez que se tem $e^0 = 1$ (porquê?).

(*iii*) Basta notar que $e^{-z}\, e^z = e^0 = 1$.

(*iv*) É uma consequência imediata da definição e das propriedades do conjugado. $\boxdot$

5.2 Funções seno e co-seno

Tal como para a função exponencial, vamos definir as funções seno e co-seno complexas através da expansão em série de potências.

Definição 5.2. *As funções* **seno** *(denotada por* sen*) e* **co-seno** *(denotada por* cos*) complexas são definidas, para todo o $z \in \mathbb{C}$, respectivamente, por*

$$\text{sen}\, z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{5.3}$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{5.4}$$

Substituindo z por $-z$ em (5.3) e (5.4), vemos que sen z é uma função ímpar e sen z uma função par, isto é, tem-se

$$\text{sen}(-z) \quad -\text{sen}\, z, \qquad \cos(-z) \quad = \cos z. \tag{5.5}$$

Diferenciando (5.3) e (5.4) termo a termo, vemos que

$$\frac{d}{dz}\,\text{sen}\, z = \cos z, \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\,\text{sen}\, z. \tag{5.6}$$

Consideremos agora expressão $\cos z + i\,\text{sen}\, z$. Adicionando as séries de potências termo a termo, temos que

$$\begin{aligned} \cos z + i\,\text{sen}\, z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k \end{aligned}$$

onde

$$c_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{k/2}}{k!}, & k \text{ par} \\ i\frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!}, & k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Como $i^2 = -1$, tem-se $c_k = i^k$, para todo o k, pelo que

$$\cos z + i\,\text{sen}\, z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = e^{iz}.$$

Obtemos assim a importante fórmula

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i\,\text{sen}\, z} \tag{5.7}$$

Nota:

- É importante referir que as séries de potências que definem as funções exp, sen e cos são, quando $z \in \mathbb{R}$, as expansões conhecidas para as respectivas funções de variável real. Isto significa que as novas funções complexas seno, co-seno e exponencial são uma extensão a $\mathbb{C}$ das funções definidas em $\mathbb{R}$. Assim sendo, quando $x \in \mathbb{R}$, não há qualquer ambiguidade quando usamos, por exemplo, $\operatorname{sen} x$.
- Tendo em conta (5.7), vemos que a representação polar $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ de um número complexo pode ser escrita simplesmente como $z = re^{i\theta}$.

Usando a propriedade (i) do Teorema 5.1 e (5.7), tem-se, para $z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) \tag{5.8}$$

de onde se deduz facilmente que

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \tag{5.9}$$

$$\arg(e^z) = \{\operatorname{Im} z + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}. \tag{5.10}$$

Substituindo z por $-z$ em (5.7), vem

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i\operatorname{sen}(-z) = \cos z - i\operatorname{sen} z. \tag{5.11}$$

De (5.7) e (5.11) segue-se que

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \tag{5.12}$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{5.13}$$

De (5.12), (5.13) e Teorema 5.1-(i) obtêm-se facilmente as fórmulas usuais da adição para $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$, válidas agora para quaisquer complexos z_1 e z_2:

$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2 \tag{5.14}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \tag{5.15}$$

É também fácil de mostrar que

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{5.16}$$

5.3 Periodicidade das funções exponencial, seno e co-seno

Definição 5.3. *Diz-se que uma função complexa f é* **periódica** *de período $\omega \in \mathbb{C}$ se*

$$f(z+\omega) = f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{5.17}$$

Qualquer número ω que satisfaça (5.17) é chamado um **período** *para f.*

Teorema 5.2. *O número complexo ω é um período para* $\exp z$ *se e só se $\omega = 2n\pi i \;\; n \in \mathbb{Z}$.*

Dem: Temos

$$e^z = e^{z+\omega} \iff \begin{cases} |e^z| = |e^{z+\omega}|, \\ \arg e^z = \arg e^{z+\omega} \end{cases} \iff \begin{cases} e^{\operatorname{Re} z} = e^{\operatorname{Re}(z+\omega)}, \\ \operatorname{Im} z + 2n_1\pi = \operatorname{Im}(z+\omega) + 2n_2\pi, \;\; n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

onde fizemos uso das propriedades (5.9) e (5.10). Como a função exponencial (real) é injectiva, segue-se

$$e^{\operatorname{Re} z} = e^{\operatorname{Re}(z+\omega)} \iff e^{\operatorname{Re} z} = e^{\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} \omega} \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} \omega \iff \operatorname{Re} \omega = 0.$$

Por outro lado,

$$\operatorname{Im} z + 2n_1\pi = \operatorname{Im}(z+\omega) + 2n_2\pi \iff \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} \omega + 2(n_2 - n_1)\pi \iff \operatorname{Im} \omega = 2n\pi,$$

onde $n = n_1 - n_2$. Concluímos, assim, que

$$e^z = e^{z+\omega} \iff \omega = 0 + i(2n\pi) = 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z},$$

que é precisamente o resultado que pretendíamos provar. $\boxdot$

Teorema 5.3. *O número complexo ω é um período para* $\operatorname{sen} z$ *ou* $\cos z$ *se e só se $\omega = 2n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$.*

Dem: Como $\operatorname{sen}(\pi/2 + z) = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos z + \cos(\pi/2)\operatorname{sen} z = \cos z$, segue-se que ω é um período para $\operatorname{sen} z$ se e só se ω for também um período para $\cos z$. Nesse caso, temos

$$\cos(z+\omega) = \cos z \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(z+\omega) = \operatorname{sen} z \;, \; \forall z \in \mathbb{C}.$$

Usando a relação $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ é, então, imediato concluir que ω é um período para $\cos z$ (ou $\operatorname{sen} z$) se e só se $e^{i(z+\omega)} = e^{iz}$ ou seja, se e só se $i\omega$ for um período para a função $\exp z$. O resultado é, então, uma consequência imediata do teorema anterior. $\boxdot$

Teorema 5.4. *Seja $z \in \mathbb{C}$. Então*

$$\operatorname{sen} z = 0 \iff z = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{5.18}$$

$$\cos z = 0 \iff z = (n + \frac{1}{2})\,\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.19}$$

Dem: Temos

$$\operatorname{sen} z = 0 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0. \tag{5.20}$$

Multiplicando por $2ie^{iz}$, tem-se que

$$\operatorname{sen} z = 0 \iff e^{2iz} = 1 \iff 2iz = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = n\pi,\ n \in \mathbb{Z},$$

o que estabelece (5.18). A expressão (5.19) para os zeros de $\cos z$ obtém-se de imediato de (5.18), tendo em conta que $\cos z = \operatorname{sen}(\pi/2 + z)$. $\boxdot$

5.4 Outras funções trigonométricas

Para $z \neq (n + \frac{1}{2})\pi$, temos $\cos z \neq 0$ e pode, então, definir-se a função tangente (notada tan) pela fórmula (usual em $\mathbb{R}$):

$$\tan z := \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.$$

Definimos também as funções co-tangente (cot), secante (sec) e co-secante (csc):

$$\cot z := \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},\ z \neq n\pi\ ,\ n \in \mathbb{Z}.$$
$$\sec z := \frac{1}{\cos z},\ z \neq (n + \frac{1}{2})\pi\ ,\ n \in \mathbb{Z}.$$
$$\csc z := \frac{1}{\operatorname{sen} z},\ z \neq n\pi\ ,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Trata-se de funções deriváveis, cujas derivadas podem ser calculadas da forma habitual. Por exemplo, tem-se

$$\frac{d}{dz}\tan z = \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{\cos z \frac{d}{dz}\operatorname{sen} z - \operatorname{sen} z \frac{d}{dz}\cos z}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z.$$

De modo análogo se verifica que

$$\frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z, \qquad \frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z, \qquad \frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z.$$

Todas as fórmulas usuais relacionando funções trigonométricas podem ser deduzidas de propriedades das funções seno e co-seno, e podem portanto derivar-se para valores complexos das variáveis. Por exemplo, usando (5.14) e (5.15), obtemos

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2}.$$

5.5 Funções trigonométricas hiperbólicas

Definimos também as funções seno hiperbólico (senh), co-seno hiperbólico (cosh), secante hiperbólica (sech), co-secante hiperbólica (csch), tangente hiperbólica (tanh) e co-tangente hiperbólica (coth), por fórmulas análogas às usadas em $\mathbb{R}$ (definidas para $z \in \mathbb{C}$ para os quais os denominadores não se anulam:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh} z &:= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), &\qquad \cosh z &:= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),\\
\operatorname{sech} z &:= \frac{1}{\cosh z}, & \operatorname{csch} z &:= \frac{1}{\operatorname{senh} z},\\
\tanh z &:= \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, & \coth z &:= \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}.
\end{aligned}$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\operatorname{senh} z &= \cosh z, &\qquad \frac{d}{dz}\cosh z &= \operatorname{senh} z,\\
\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z &= -\operatorname{sech}\tanh z, & \frac{d}{dz}\operatorname{csch} z &= -\operatorname{csch} z \coth z,\\
\frac{d}{dz}\tanh z &= \operatorname{sech}^2 z, & \frac{d}{dz}\coth z &= -\operatorname{csch}^2 z.
\end{aligned}$$

Propriedades das funções hiperbólicas, análogas às das funções trigonométricas podem deduzir-se facilmente, usando as seguintes relações, facilmente demonstráveis:

$$\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z, \qquad \cos(iz) = \cosh z.$$

5.6 Logaritmo complexo e funções associadas

Funções multivalentes

Quando, até aqui, trabalhámos com funções complexas $f : D \to \mathbb{C}$, exigimos, como habitualmente, que cada valor da variável independente $z \in D$ tivesse **uma e uma só** imagem, isto é, que existisse um e um só $w \in \mathbb{C}$ tal $w = f(z)$. No entanto, em análise complexa, é conveniente "alargar" o conceito de função e introduzir as chamadas funções **multivalentes**, ou **multívocas**, as quais associam a cada valor da variável independente $z \in D$ um **conjunto** de valores $W \subset \mathbb{C}$.

Função (multivalente) argumento

Relembre que, dado um número complexo $z \neq 0$, dizemos que $\theta \in \mathbb{R}$ é *um argumento* de z, se θ satisfizer

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = |z|e^{i\theta}. \tag{5.21}$$

Ao conjunto

$$\arg z = \{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\theta}\} \tag{5.22}$$

(de todos os possíveis argumentos de z) chamamos **argumento de** z. Faz, assim, sentido falar na função (multivalente) *argumento* (arg), definida em $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, que associa a cada $z \in D$ o *conjunto* (5.22) dos seus argumentos.

Quando trabalhamos com funções multivalentes, é importante considerar os chamados *ramos* dessa função, que passamos a definir.

Definição 5.4. *Dada uma função multivalente f definida num certo domínio D, que, a cada $z \in D$, associa um conjunto W_z de números complexos, chama-se* **ramo** *de f a qualquer função contínua f_R, definida num domínio $D_R \subseteq D$ que, a cada $z \in D_R$, associa um (e um só) elemento de W_z (isto é, uma das possíveis imagens de z por f).*

Exemplo 5.1. *Relembre que, dado um complexo não nulo z, ao (único) argumento de z pertencente ao intervalo $(-\pi, \pi]$, chamamos argumento principal de z, o qual denotamos por* $\mathrm{Arg}\, z$.

Relembre também que a função (real)

$$\begin{aligned} \text{arcsen}: \quad [-1,1] &\to [-\pi/2, \pi/2] \\ x &\mapsto \theta \end{aligned}$$

onde θ é tal que $\text{sen}(\theta) = x$ *é uma função contínua em todo o seu domínio.*

Considere-se a função $\alpha(z)$ definida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ por

$$\alpha(z) = \text{arcsen}\left(\frac{\text{Im}\, z}{|z|}\right). \tag{5.23}$$

Esta função, sendo composta de duas funções contínuas, é contínua em todo o seu domínio. É também fácil de ver que, para $z = x + iy \neq 0$, valor principal do argumento de z é dado, usando a função $\alpha(z)$, por

$$\text{Arg}\, z = \begin{cases} \alpha(z), & \textit{se } x \geq 0, \\ \pi - \alpha(z), & \textit{se } x < 0 \textit{ e } y \geq 0, \\ -\pi - \alpha(z), & \textit{se } x < 0 \textit{ e } y < 0. \end{cases} \tag{5.24}$$

Seja $\mathbb{C}_\pi$ o conjunto de todos os pontos do plano complexo, com excepção da origem e dos pontos do semi-eixo negativo dos xx, isto é,

$$\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \tag{5.25}$$

Vamos ver que é possível definir um ramo da função argumento neste conjunto $\mathbb{C}_\pi$. Seja

$$\begin{aligned} \text{arg}_\pi: \quad \mathbb{C}_\pi &\to (-\pi, \pi) \\ z &\mapsto \text{Arg}\, z \end{aligned} \tag{5.26}$$

Considerem-se os conjuntos abertos

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\} \\ D_2 &= \{z = x + iy \in C : x < 0 \textit{ e } y > 0\} \\ D_3 &= \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x < 0 \textit{ e } y < 0\} \end{aligned}$$

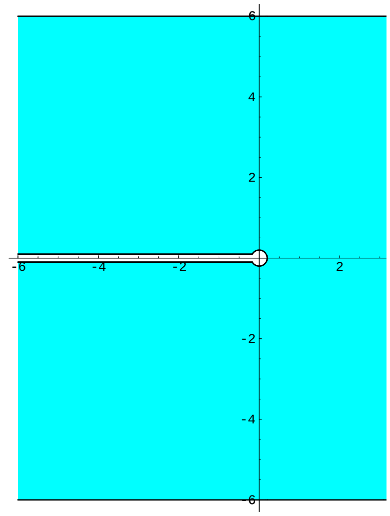


Figura 5.1: Conjunto $\mathbb{C}_\pi$

e note-se que $\mathbb{C}_\pi$ é a união dos três domínios D_1, D_2 e D_3 e do eixo imaginário (sem a origem), isto é,

$$\mathbb{C}_\pi = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \{z = x + iy : x = 0 \text{ e } y \neq 0\}.$$

Pela fórmula (5.26)e pela continuidade da função α, é imediato concluir que a a função $\arg_\pi$ *definida por (5.26) é uma função contínua em cada um dos conjuntos D_1, D_2 e D_3; para provar a continuidade em $\mathbb{C}_\pi$ resta, portanto, mostrar que ela é contínua também no eixo imaginário. Seja, então, $z_0 = x_0 + iy_0$ com $x_0 = 0$ e $y_0 > 0$ (o caso em que $y_0 < 0$ pode tratar-se de modo análogo) e seja $z = x + iy \in \mathbb{C}_\pi$ com $y > 0$. Então, tem-se*

$$|\arg_\pi z - \arg_\pi z_0| = \begin{cases} |\alpha(z) - \alpha(z_0)|, & \textit{se} \quad x \geq 0, \\ |\pi - \alpha(z) - \alpha(z_0)|, & \textit{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

Mas, como $\alpha(z_0) = \pi/2$, tem-se, no caso $x < 0$,

$$|\pi - \alpha(z) - \alpha(z_0)| = |\pi - \alpha(z) - \frac{\pi}{2}| = |\frac{\pi}{2} - \alpha(z)| = |\alpha(z) - \alpha(z_0)|.$$

Assim,conclui-se que $|\arg_\pi z - \arg_\pi z_0| = |\alpha(z) - \alpha(z_0)|$ para todo o $z = x + iy \in \mathbb{C}_\pi$ com $y > 0$. Como α é contínua em z_0, podemos concluir que o mesmo se passa para a função $\arg_\pi$.

À função $\arg_\pi$ *definida por (5.26), isto é, à função que associa a cada* z *do conjunto* $\mathbb{C}_\pi$ *o seu argumento principal* $\operatorname{Arg} z$*, chamamos* **ramo principal** *da função argumento. Esta função é denotada por* Arg.

Exemplo 5.2. *Vimos, no exemplo anterior, que é possível definir um ramo do argumento (nesse caso, o chamado ramo principal) no conjunto* $\mathbb{C}_\pi$*. É também possível definir outros ramos da função argumento, por exemplo, em conjuntos da forma*

$$\mathbb{C}_\alpha := \mathbb{C} \setminus R_\alpha,$$

onde, para $\alpha \in \mathbb{R}$*,* R_α *denota a semi-recta*

$$R_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\alpha}, r \geq 0\}.$$

Mais precisamente, a função

$$\begin{aligned} \arg_\alpha : \quad C_\alpha &\to (\alpha - 2\pi, \alpha) \\ z &\mapsto \theta \end{aligned} \tag{5.27}$$

onde θ *satisfaz*

$$z = re^{i\theta} \quad \text{e} \quad \theta \in (\alpha - 2\pi, \alpha)$$

é um ramo de argumento em $\mathbb{C}_\alpha$*. O que os conjuntos* $\mathbb{C}_\alpha$ *têm em comum é serem obtidos*

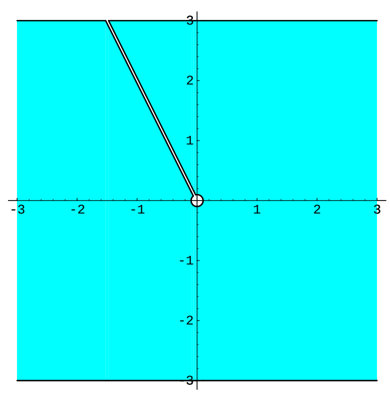


Figura 5.2: Conjunto $\mathbb{C}_\alpha,\ \alpha = \frac{5\pi}{8}$

do plano complexo extraindo-lhe uma semi-recta de origem no ponto $z = 0$*. Isto faz com* *que não seja possível incluir, em qualquer deles, uma circunferência centrada na origem (o que evita que se possa "dar uma volta completa" em torno da origem, em qualquer desses conjuntos). De facto, pode mostrar-se que,* **se D for um domínio que contenha uma circunferência de centro na origem, então não é possível definir um ramo do argumento nesse domínio***.*

Cada uma das semi-rectas R_α é dita um corte de ramificação (correspondente ao ramo $\arg_\alpha$*) e o ponto $z = 0$, de onde emanam os cortes de ramificação, é dito um ponto de ramificação.*

Função logaritmo

Dado um número complexo z, determinemos todos os números complexos w tais que

$$e^w = z. \tag{5.28}$$

Como, para todo o $w \in \mathbb{C}$, se tem $e^w \neq 0$, segue-se que, se $z = 0$, o problema não tem solução. Seja, então, $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tem-se

$$e^w = z \iff |e^w| = |z| \quad \text{e} \quad \arg(e^w) = \arg z$$

ou, atendendo a (5.9) e (5.10),

$$\begin{aligned} e^w = z &\iff e^{\operatorname{Re} w} = |z| \quad \text{e} \quad \{\operatorname{Im} w + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \arg z \\ &\iff \operatorname{Re} w = \ln |z| \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} w \in \arg z, \end{aligned}$$

onde $\ln |z|$ denota o logaritmo natural de $|z|$. Vemos assim que, dado um número complexo $z = x + iy \neq 0$, as soluções da equação (5.28) são todos complexos da forma

$$w = \ln |z| + i\theta, \quad \theta \in \arg z.$$

Cada um dos números dados pela expressão anterior é chamado um logaritmo de z e (à semelhança do que fizemos para o argumento), denotamos o conjunto desses números por $\log z$. Temos, assim a seguinte definição.

Definição 5.5. *Dado um complexo $z = x + iy$ não nulo, denota-se por* $\log z$ *o conjunto*

$$\log z := \{\ln |z| + i\theta : \theta \in \arg z\} = \ln |z| + i \arg z. \tag{5.29}$$

Cada um dos elementos do conjunto (5.29) é chamado um logaritmo de z.

Nota: Na última igualdade em (5.29) estamos, implicitamente, a usar a seguinte notação: se $c \in \mathbb{C}$ e $S \subset \mathbb{C}$, então

$$c + S := \{c + s : s \in S\}.$$

Chama-se função logaritmo à função multivalente que a cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ associa o conjunto dos valores (5.29).

Nota: Como

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\},$$

o conjunto (5.29) é também dado por

$$\log z = \{\ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2n\pi) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2n\pi i : n \in \mathbb{Z}\} \tag{5.30}$$

Naturalmente, vamos estar interessados em escolher *ramos* para esta função multivalente, isto é, funções contínuas (definidas em domínios $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$) que, a cada $z \in D$ associem um elemento de (5.29), ou seja, associem um e um só complexo w tal que $e^w = z$.

Atendendo à expressão (5.29), é imediato concluir que será possível definir um ramo do logaritmo num determinado domínio $D \subset \mathbb{C}$ se e só se for possível definir um ramo do argumento nesse domínio.

Mais precisamente, a cada ramo da função argumento vai corresponder um ramo da função logaritmo e cada ramo da função logaritmo tem, como parte imaginária, um ramo do argumento. Assim, em $\mathbb{C}_\alpha$, é possível definir um ramo da função logaritmo:

$$\begin{aligned} \log_\alpha : \quad \mathbb{C}_\alpha &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \ln |z| + i \arg_\alpha(z), \end{aligned} \tag{5.31}$$

onde $\arg_\alpha$ é dado por (5.27).

Em particular, em $\mathbb{C}_\pi$ pode definir-se um ramo de logaritmo – chamado **ramo principal do logaritmo** e denotado simplesmente por Log – do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} : \quad \mathbb{C}_\pi &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \ln |z| + i \operatorname{Arg} z. \end{aligned} \tag{5.32}$$

De notar que (porque tal não é possível para a função argumento) também não é possível definir nenhum ramo do logaritmo em qualquer domínio D que contenha uma circunferência de centro na origem.

Teorema 5.5. *Seja $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ um domínio no qual está definido um ramo f da função logaritmo. Então, a função $g \colon D \to \mathbb{C}$ é um ramo do logaritmo em D se e só se*

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; f(z) - g(z) = 2k\pi i \;,\; \forall z \in D.$$

Dem: Se $f \colon D \to \mathbb{C}$ é um ramo do logaritmo em D, então f é contínua em D e, para cada $z \in D$, $f(z)$ é um logaritmo de z, ou seja

$$e^{f(z)} = z.$$

Então, para k em $\mathbb{Z}$, a função g, definida, em D, por

$$g(z) = f(z) + 2k\pi i$$

é também contínua em D e verifica

$$e^{g(z)} = e^{f(z)+2k\pi i} = e^{f(z)} = z \;,\; \forall z \in D,$$

isto é, é um ramo de $\log z$ em D.

Reciprocamente, suponhamos g é um ramo do logaritmo em D. Então, para cada $z \in D$, $f(z) - g(z) = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, ou seja, a funcção h, definida em D, por

$$h(z) = \frac{f(z) - g(z)}{2\pi i}$$

é contínua em D e toma apenas valores inteiros. Como D é conexo, $h(D)$ é conexo[1], o que implica que $h(z)$ terá de ser constante, ou seja, que $\exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; f(z) - g(z) = 2k\pi i \;,\; \forall z \in D$, tal como queríamos provar. $\boxdot$

Como corolário imediato do teorema anterior, tem-se o seguinte.

Corolário 5.1. *Seja $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ um domínio no qual está definido um ramo f da função argumento. Então, a função $g \colon D \to \mathbb{C}$ é um ramo do argumento em D se e só se*

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; f(z) - g(z) = 2k\pi \;,\; \forall z \in D.$$

[1] Embora não o tenhamos referido anteriormente, pode provar-se que a imagem de um conjunto conexo, por uma função contínua, é um conjunto conexo.

Teorema 5.6. *Seja $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ um domínio no qual está definido um ramo f da função logaritmo. Então, f é derivável em D e tem-se*

$$f'(z) = \frac{1}{z}\ ,\ \forall z \in D.$$

Dem: Comecemos por notar que a função f é injectiva; de facto,

$$f(z) = f(w) \Longrightarrow e^{f(z)} = e^{f(w)} \Longrightarrow z = w.$$

Mostremos que a função é derivável num ponto $z_0 \in D$. Seja $h \neq 0$ tal que $z_0 + h \in D$. Temos

$$e^{f(z_0+h)} = z_0 + h, \qquad e^{f(z_0)} = z_0$$

e, pela injectividade de f, terá de ser $f(z_0) \neq f(z_0 + h)$. Considere-se, então

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{e^{f(z_0+h)} - e^{f(z_0)}}.$$

Sendo f contínua em z_0 e sendo e^z derivável em $\mathbb{C}$ com derivada e^z, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\dfrac{e^{f(z_0+h)} - e^{f(z_0)}}{f(z_0+h) - f(z_0)}} \\ &= \frac{1}{e^{f(z_0)}} = \frac{1}{z_0}.\end{aligned}$$

Assim, fé derivável em z_0, tendo-se $f'(z_0) = \dfrac{1}{z_0}$. $\boxdot$

Como caso particular do teorema anterior, temos que que a função $\operatorname{Log} z$ definida em $\mathbb{C}_\pi$ é derivável nesse conjunto e

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}_\pi.$$

Assim sendo, podemos também concluir que a função $\operatorname{Arg} z$ (parte imaginária da função $\operatorname{Log} z$) é harmónica em $\mathbb{C}_\pi$.

Potência de expoente $\alpha \in \mathbb{C}$

Definição 5.6. *Sejam $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Designa-se por z^α o conjunto*

$$z^\alpha := \{e^{\alpha\omega} : \omega \in \log z\} \tag{5.33}$$

Cada elemento do conjunto (5.33) é chamado uma potência α de z.

Nota:

- Se, dado um conjunto $S \subset \mathbb{C}$, interpretarmos $\exp(S)$ ou e^S com o significado

$$e^S := \exp(S) := \{e^s : s \in S\},$$

então poderemos escrever simplesmente

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}. \tag{5.34}$$

- Como $\log z = \{\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2n\pi), n \in \mathbb{Z}\} = \{\operatorname{Log} z + 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}\}$ tem-se também a seguinte expressão para z^α:

$$z^\alpha = \{e^{\alpha \operatorname{Log} z}.e^{\alpha 2n\pi i} : n \in \mathbb{Z}\} \tag{5.35}$$

- Deixamos ao cuidado dos alunos verificar que, quando $\alpha = n$ ou $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, o conjunto das potências (5.33) é dado, respectivamente, por (1.21) e (1.25), ou seja, que esta definição de potência de expoente α de z não entra em contradição com os casos já definidos anteriormente.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$, fixo, a função (geralmente multivalente) que a cada z associa o conjunto de valores (5.33) é referida como **função potência de expoente** α.

A função

$$\begin{aligned} P_\alpha : \quad \mathbb{C}_\pi &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \exp(\alpha \operatorname{Log} z), \end{aligned} \tag{5.36}$$

onde, recorde-se, $\operatorname{Log} z$ designa o valor principal do logaritmo, é um ramo da função potência de expoente α – chamado **ramo principal da potência** de expoente α.

Nota: Quando $z = e$, existem, neste momento, duas interpretações possíveis para e^α: uma delas corresponde ao (único) valor $\exp(\alpha)$ e outra ao conjunto

$$\exp(\alpha \log e) = \exp\left[\{\alpha(\ln e + 2n\pi i : n \in \mathbb{Z})\}\right]$$

$$= \{\exp(\alpha) + 2n\alpha\,\pi i : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Para evitar ambiguidades, quando escrevermos e^α, a não ser que algo seja dito em contrário, queremos referir-nos ao valor $\exp(\alpha)$ (o qual corresponde também ao valor dado pelo ramo principal da potência α).

Exemplo 5.3. *Apresentamos um exemplo simples de utilização do Mathematica em cálculos com funções elementares; no caso de funções multivalentes, tente identificar qual o ramo "escolhido" pelo Mathematica.*

```
z1 = i;
z2 = -1 + i;
ComplexExpand[Log[z1] + Log[z2]]
ComplexExpand[Log[z1 z2]]
```

$$\frac{5\,i\,\pi}{4} + \frac{\text{Log}[2]}{2}$$

$$-\frac{3\,i\,\pi}{4} + \frac{\text{Log}[2]}{2}$$

```
ComplexExpand[Cos[2 + 3 i]]
```

Cos[2] Cosh[3] - i Sin[2] Sinh[3]

```
ComplexExpand[(1 + i)^(1+i)]
```

$$\sqrt{2}\, e^{-\pi/4}\, \text{Cos}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\text{Log}[2]}{2}\right] + i\, \sqrt{2}\, e^{-\pi/4}\, \text{Sin}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\text{Log}[2]}{2}\right]$$

5.7 Exercícios

Exercício 5.1. Expresse na forma $a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$:

a) e^i *b)* $e^{2+i\pi}$ *c)* $\operatorname{sen} i$ *d)* $\cos i$

e) $\operatorname{senh} i$ *f)* $\cosh i$ *g)* $\cos(\pi/4 - i)$ *h)* $\tan(1 + i)$

Exercício 5.2. Mostre que:

a) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ *b)* $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$.

Exercício 5.3. Verifique as seguintes relações, válidas para todo o $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

a) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$

b) $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

c) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x$

d) $|\cos z|^2 = \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x.$

Exercício 5.4.

a) Mostre que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

b) Mostre que $|\operatorname{sen} z|^2 + |\cos z|^2 = 1$ se e só se $z \in \mathbb{R}$. Mostre também que a função $\cos z$ é *ilimitada* em $\mathbb{C}$ (isto é, não existe $M > 0$ tal que $|\cos z| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$).

Exercício 5.5. Determine os conjuntos de pontos onde cada uma das funções dadas nas alíneas seguintes assume:

(i) valores reais

(ii) valores imaginários puros :

a) e^z *b)* $\cos z$ *c)* $\operatorname{sen} z$ *d)* $\tan z$

e) $\cosh z$ *f)* $\operatorname{senh} z$ *g)* $\tanh z$.

Exercício 5.6. Calcule:

a) $\operatorname{Log}(3i)$ *b)* $\operatorname{Log}(-2i)$ *c)* $\operatorname{Log}(\sqrt{3} - i)$

d) $\operatorname{Log}(z^6)$, onde $z = e^{i\pi/4}$ *e)* $\operatorname{Log} x,\ x \in \mathbb{R},\ \ x \neq 0$ *f)* $\log(-5)$

g) $\log 4$ *h)* $\log(2i)$

Exercício 5.7. Prove que:

a) $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$

b) Será verdade que $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$? Justifique convenientemente.

Exercício 5.8. Descubra qual a falácia do seguinte "Paradoxo de Bernoulli":

$$(-z)^2 = z^2 \ \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \ \Rightarrow \ \log(-z) = \log z \Rightarrow z = -z.$$

Exercício 5.9. Calcule os valores **principais** das seguintes potências:

a) $1^{\sqrt{2}}$ *b)* $(-2)^{\sqrt{2}}$ *c)* i^i *d)* 2^i

e) $(3-3i)^{1+i}$ *f)* $(3+3i)^5$ *g)* $(1-i)^{1/2}$

Exercício 5.10. Considere a expressão da potência de expoente α de um complexo $z = re^{i\theta}$, $z \neq 0$:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z},$$

como o significado usual para e^S, se S é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Mostre que:

a) se $\alpha = n$, onde $n \in \mathbb{Z}$, então

$$z^\alpha = z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta),$$

ou seja, que não há incongruência entre esta definição de potência e a fórmula anteriormente deduzida para a potência de expoente inteiro de um complexo;

b) se $\alpha = \frac{1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$z^\alpha = z^{1/n} = \{\sqrt[n]{r}\,\text{cis}(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) : k = 0, 1, \ldots, n-1\},$$

reencontrando-se, assim, a expressão usual das n raízes de índice n de z.

Exercício 5.11. Se z^α denota o ramo principal da função potência α, mostre que

$$\frac{d}{dz}(z^\alpha) = \alpha z^\alpha \frac{1}{z}.$$

Mostre que a equação anterior pode escrever-se na forma “mais habitual”

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1},$$

desde que consideremos também o ramo principal da potência de expoente $(\alpha - 1)$.

6. Integração complexa

God does not care about our mathematical difficulties; He integrates empirically.

Albert Einstein

6.1 Integração de contorno

Ao iniciar o estudo da integração complexa, começaremos por introduzir o conceito de integral para uma função complexa de variável real, definida num intervalo fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Antes, porém, recordamos a definição de derivada para uma função complexa, aplicada ao caso particular em que f está apenas definida num intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Definição 6.1. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ e seja $t \in (a,b)$. Dizemos que f é derivável em t, se existe o limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

A esse limite chamamos derivada de f em t e denotamo-lo por $f'(t)$. Para os pontos $t=a$ e $t=b$, a definição é modificada, tomando-se apenas limites laterais direito e esquerdo, respectivamente, isto é

$$f'(a) = f'(a^+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

e

$$f'(b) = f'(b^-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

Se f é derivável em cada ponto de $[a, b]$, dizemos que f é derivável em $[a, b]$, tendo-se então uma nova função, chamada derivada de f,

$$\begin{array}{rll} f'\colon & [a,b] & \to \mathbb{C}. \\ & t & \mapsto f'(t). \end{array}$$

Dada uma função $f = u + iv\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, tem-se que f é derivável em $[a, b]$ se e só se u e v são deriváveis em $[a, b]$, tendo-se

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Definição 6.2. *Sendo $f = u + iv\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua, o* **integral de f em** *$[a, b]$, denotado por $\int_a^b f(t)\,dt$, é definido do seguinte modo:*

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Exemplo 6.1. *Seja $I = \displaystyle\int_0^1 (t - i)^2 dt$. Então,*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (t^2 - 1)dt + i\int_0^1 (-2t)dt \\ &= [t^3/3 - t]\Big|_0^1 - i\,[t^2]\Big|_0^1 \\ &= -\frac{2}{3} - i \end{aligned}$$

O mesmo resultado pode ser obtido simplesmente, usando o Mathematica:

$$\int_0^1 (t - i)^2\, dt$$

$$-\frac{2}{3} - i$$

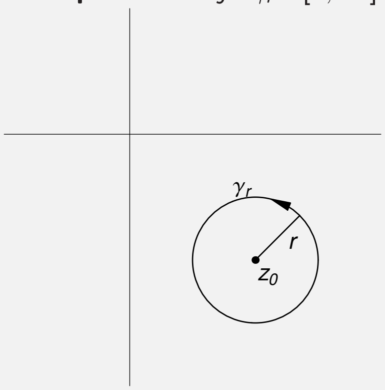
Definição 6.3. *Diz-se que um caminho $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ é* **suave**, *se $\gamma'(t)$ existe para cada t em $[a, b]$ e se γ' é uma função contínua que nunca se anula em $[a, b]$.*

Se $\gamma\colon [a, b] \to D \subset \mathbb{C}$ é um caminho suave e $f\colon D \to \mathbb{C}$ é uma função contínua, então $(f \circ \gamma).\gamma'$ é uma função contínua definida em $[a, b]$. Faz assim sentido introduzir a seguinte definição.

Definição 6.4. *Sejam $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho suave e f uma função definida e contínua no traço de γ. O* **integral de** f **ao longo de** γ *– denotado por $\int_\gamma f(z)\,dz$ ou, simplesmente, $\int_\gamma f$ – é definido do seguinte modo:*

$$\int_\gamma f(z)\; dz := \int_a^b f(\gamma(t))\; \gamma'(t)\; dt. \tag{6.1}$$

Exemplo 6.2. *Seja $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$,$z_0 \in \mathbb{C}$, fixo, $r > 0$.*



Calculemos, através da definição,

$$\int_{\gamma_r} (z - z_0)^n\; dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sendo $f(z) = (z - z_0)^n$, tem-se

$$f(\gamma_r(t)) = f(z_0 + re^{it}) = (re^{it})^n = r^n e^{int}.$$

Além disso,

$$\gamma_r'(t) = r\,(-\operatorname{sen} t + i \cos t) = ir\,(\cos t + i \operatorname{sen} t) = ire^{it},$$

donde, se obtém

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} f(z)\; dz &= \int_0^{2\pi} (r^n e^{int})\; (ire^{it})\; dt\\ &= \int_0^{2\pi} ir^{n+1} e^{i(n+1)t} dt\\ &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos(n+1)t\; dt - r^{n+1} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n+1)t\; dt\end{aligned}$$

Temos, então:

- *se* $n \neq -1$,

$$\int_{\gamma_r} f(z)\ dz = ir^{n+1}\left(\frac{\operatorname{sen}(n+1)t}{n+1}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + r^{n+1}\left(\frac{\cos(n+1)t}{n+1}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

- *se* $n = -1$,

$$\int_{\gamma_r} f(z)\ dz = i\int_0^{2\pi}\ dt = 2\pi i.$$

Assim (independentemente do valor de r*), tem-se*

$$\boxed{\int_{\gamma_r}(z-z_0)^n\ dz = \begin{cases} 0, & \text{se } \ n \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{se } \ n = -1 \end{cases}}$$

Definição 6.5. *Se* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *é um caminho suave, chama-se* **comprimento** *de* γ*, e denota-se por* $L(\gamma)$*, o número (real não negativo) dado por*

$$L(\gamma) := \int_a^b \left|\gamma'(t)\right|\ dt. \tag{6.2}$$

Exemplo 6.3. *Seja* $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *tal que* $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ *,*$z_0 \in \mathbb{C}$*, fixo,* $r > 0$ *(ou seja,* $\{\gamma_r\}$ *é a circunferência de centro no ponto* z_0 *e raio* r*). Então,*

$$L(\gamma_r) = \int_0^{2\pi} |\gamma_r'(t)|\ dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}|\ dt = \int_0^{2\pi} r\ dt = 2\pi r.$$

Definição 6.6. *Dizemos que um caminho* γ *é um* **contorno***, se* γ *puder decompor-se numa soma de um número finito de caminhos suaves, isto é, se* γ *for da forma*

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *são caminhos suaves tais que o ponto final de* γ_k *coincide com o ponto inicial de* γ_{k+1}*;* $k = 1, \ldots, n-1$*.*

Nota: *Um caminho suave é, naturalmente, um contorno. Um contorno γ é um caminho, mas não necessariamente suave, porque pode existir um número finito de pontos onde a derivada de γ não seja contínua.*

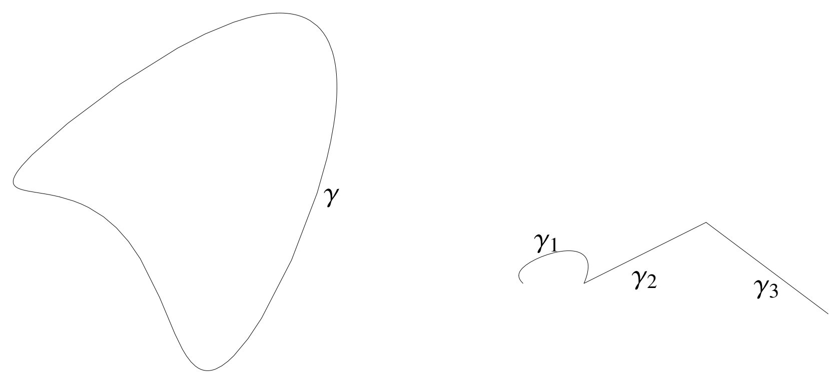


Figura 6.1: Um caminho suave (esq.) e um contorno (dir.)

Definição 6.7. *Dados uma função contínua $f\colon D \to \mathbb{C}$ e um contorno $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ em D,* **o integral de f ao longo do contorno** *γ é definido por:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz. \tag{6.3}$$

É trivial verificar que, se um caminho suave λ for subdividido como $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, então

$$\int_\lambda f(z)\,dz = \int_{\lambda_1} f(z)\,dz + \int_{\lambda_2} f(z)\,dz.$$

Assim, subdivisões dos caminhos suaves $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ na decomposição de um contorno γ não afectam o valor dos integrais, ou seja, o integral de contorno (6.3) está bem definido.

Tem-se, também, a seguinte definição de comprimento de um contorno.

Definição 6.8. *Se $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ é um contorno, então o comprimento de γ, denotado por $L(\gamma)$ é, por definição, dado por*

$$L(\gamma) := L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + \cdots + L(\gamma_n). \tag{6.4}$$

As propriedades contidas no teorema seguinte são análogas ao caso real.

Teorema 6.1. *Seja γ um contorno em $D \subset \mathbb{C}$. Dadas quaisquer funções f, f_1 e f_2 definidas e contínuas em D, e dado um qualquer número complexo $c \in \mathbb{C}$, tem-se*

$$\int_\gamma (f_1 + f_2)(z)\ dz = \int_\gamma f_1(z)\ dz + \int_\gamma f_2(z)\ dz \tag{6.5}$$

e

$$\int_\gamma (cf)(z)\ dz = c\int_\gamma f(z)\ dz. \tag{6.6}$$

Dem: De acordo com a Definição 6.7, é evidente que necessitamos apenas de demonstrar as propriedades para caso em que o contorno γ é um caminho suave.

Sejam

$$f_1(\gamma(t))\,\gamma'(t) = U_1(t) + iV_1(t)$$

e

$$f_2(\gamma(t))\,\gamma'(t) = U_2(t) + iV_2(t).$$

Então, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (f_1 + f_2)(z)dz &= \int_a^b \left[f_1\left(\gamma(t)\right) + f_2\left(\gamma(t)\right)\right]\gamma'(t)\ dt \\
&= \int_a^b \left[f_1\left(\gamma(t)\right)\ \gamma'(t) + f_2\left(\gamma(t)\right)\ \gamma'(t)\right]\ dt \\
&= \int_a^b \left[U_1(t) + iV_1(t) + U_2(t) + iV_2(t)\right]\ dt \\
&= \int_a^b \left[U_1(t) + U_2(t)\right]\ dt + i\int_a^b \left[V_1(t) + V_2(t)\right]\ dt \\
&= \int_a^b U_1(t)dt + i\int_a^b V_1(t)\ dt + \int_a^b U_2(t)dt + i\int_a^b V_2(t)\ dt \\
&= \int_\gamma f_1(z)\ dz + \int_\gamma f_2(z)dz,
\end{aligned}$$

estabelecendo-se, assim, a primeira propriedade. A demonstração de (6.6) é deixada ao cuidado dos alunos. ⊡

Relembre que, se $\gamma\colon [a,b] \to D$ é um caminho, o caminho oposto $(-\gamma)\colon [a,b] \to D$ é definido por

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t) \qquad (a \le t \le b).$$

Teorema 6.2. *Sejam $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e γ um contorno em D. Então, tem-se*

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz. \tag{6.7}$$

Dem: Uma vez mais, basta demonstrar o resultado para o caso em que γ é um caminho suave. Suponhamos que $f(\gamma(t))\gamma'(t) = U(t) + iV(t)$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma} f(z)\, dz &= \int_a^b f((-\gamma)(t))(-\gamma)'(t)\, dt \\
&= \int_a^b f(\gamma(a+b-t))\frac{d}{dt}(\gamma(a+b-t))\, dt \\
&= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)\, dt \\
&= -\int_a^b (U(a+b-t) + iV(a+b-t))\, dt \\
&= -\int_a^b U(a+b-t)\, dt - i\int_a^b V(a+b-t)\, dt.
\end{aligned}$$

Efectuando a mudança de variável definida por $s = a+b-t$ em cada um dos integrais (reais) anteriores, vem

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma} f(z)\, dz &= -\int_b^a U(s)\,(-ds) - i\int_b^a V(s)\,(-ds) \\
&= -\int_a^b U(s)\, ds - i\int_a^b V(s)\, ds \\
&= -\int_a^b (U(s) + iV(s))\, ds \\
&= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\, ds \\
&= -\int_{\gamma} f(z)\, dz,
\end{aligned}$$

como desejávamos mostrar. $\boxdot$

Definição 6.9. *Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho; se $\phi\colon [c, d] \to [a, b]$ é diferenciável, $\phi'(t) > 0, t \in [c, d]$ e $\phi(c) = a$ e $\phi(d) = b$, então $\lambda = \gamma \circ \phi$ é dita uma reparametrização de γ.*

Teorema 6.3. *Sejam γ um contorno em $D \subset \mathbb{C}$ e f é uma função contínua em D; então, para qualquer reparametrização λ de γ, tem-se*

$$\int_\lambda f(z)\ dz = \int_\gamma f(z)\ dz. \tag{6.8}$$

Dem: Demonstramos o teorema apenas para o caso de γ ser um caminho suave; a demonstração para um contorno é, então, uma consequência imediata da Definição 6.7. Seja $f(\gamma(t))\gamma'(t) = U(t) + iV(t)$; então

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\ dz &= \int_a^b U(t)\ dt + i\int_a^b V(t)\ dt \\
&= \int_c^d U(\phi(t))\phi'(t)\ dt + i\int_c^d V(\phi(t))\phi'(t)\ dt \\
&= \int_c^d [U(\phi(t)) + iV(\phi(t))]\ \ \phi'(t)\ dt \\
&= \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\ \gamma'(\phi(t))\,\phi'(t)\ dt \\
&= \int_c^d f((\gamma\circ\phi)(t))\ (\gamma\circ\phi)'(t)\ dt \\
&= \int_c^d f(\lambda(t))\ \lambda'(t)\ dt \\
&= \int_\lambda f(z)\ dz,
\end{aligned}$$

como se desejava provar. $\boxdot$

6.2 Teorema fundamental da integração de contorno

Teorema 6.4 (Teorema fundamental da integração de contorno)**.** *Seja $f\colon D \to \mathbb{C}$ uma função contínua e γ um contorno em D, com ponto inicial z_0 e ponto final z_1. Se existe uma função $F\colon D \to \mathbb{C}$ derivável em D e tal que $F'(z) = f(z)$, para todo o $z \in D$, então*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = F(z_1) - F(z_0). \tag{6.9}$$

Dem: Uma vez mais, é apenas necessário demonstrar o teorema no caso de γ ser um caminho suave.

Note-se que, se $w(t) = u(t) + iv(t)$ e $W(t) = U(t) + iV(t)$ são duas funções definidas em $[a, b]$, tais que $W'(t) = w(t)$, então $U'(t) = u(t)$ e $V'(t) = v(t)$, e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b w(t)\ dt &= \int_a^b [u(t) + iv(t)]\ dt \\
&= \int_a^b u(t)\ dt + i\int_a^b v(t)\ dt \\
&= \int_a^b U'(t)\ dt + i\int_a^b V'(t)\ dt \\
&= U(b) - U(a) + i[V(b) - V(a)] \\
&= W(b) - W(a).
\end{aligned}$$

Temos, então

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\ dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\ \gamma'(t)\ dt \\
&= \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\ dt \\
&= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\ dt \\
&= (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\
&= F(z_1) - F(z_0),
\end{aligned}$$

tal como se pretendia provar. $\boxdot$

Definição 6.10. *Dada uma função contínua f definida num domínio D, a toda a função F definida em D, que seja derivável em D e satisfaça $F'(z) = f(z)$, para todo o $z \in D$, chamamos* **primitiva de** *f em D.*

Note-se que, sendo D um domínio, uma primitiva de f em D é única a menos da soma com uma constante. Com efeito, se $F'(z) = f(z), \forall z \in D$ e $G'(z) = f(z), \forall z \in D$, então $F'(z) - G'(z) = (F - G)'(z) = 0, \forall z \in D$, donde se conclui, usando o Teorema 4.6, que existe uma constante $c \in C$ tal que $F(z) - G(z) = c, \forall z \in C$, ou seja, que se tem $F(z) = G(z) + c, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Devemos notar aqui que, contrariamente ao caso real, nem toda a função contínua admite uma primitiva. Por exemplo, a função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \overline{z}$ não admite uma primitiva em $\mathbb{C}$. De facto, provaremos mais tarde que uma função derivável num domínio é infinitamente derivável nesse domínio. Assim, se f admitir uma primitiva primitiva F, essa função primitiva F (por admitir derivada) deverá ser derivável duas vezes etc, ou seja, a sua derivada $F' = f$ terá de ser derivável. Deste modo se conclui que **uma função que não seja derivável num domínio, também não é primitivável nesse domínio**.

No entanto, muitas funções admitem primitivas. Por exemplo, uma função polinomial $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ tem uma primitiva óbvia

$$P(z) = a_0 z + \frac{1}{2} a_1 z^2 + \ldots + \frac{a_n z^{n+1}}{(n+1)}.$$

Mais geralmente, uma série de potências tem uma primitiva dentro do seu disco de convergência, como se estabelece no seguinte teorema.

Teorema 6.5. *Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então a série definida por*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \tag{6.10}$$

também tem raio de convergência R e define uma primitiva de f em $B(0; R)$, isto é, tem-se $F'(z) = f(z)$ para todo o $z \in B(0; R)$.

Dem: É fácil de mostrar (reveja a demonstração do Lema 4.1) que o raio de convergência da série (6.10) é igual ao raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. De acordo com o Teorema 4.10, podemos encontrar a derivada de F derivando termo a termo, ou seja, tem-se $F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a_n}{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$. $\boxdot$

Nota: Por uma questão de simplicidade, o teorema anterior foi estabelecido para séries de potências em torno de zero, mas tem uma adaptação óbvia para séries de potências em torno de um ponto z_0. Usando também o Teorema 6.4, concluímos que, se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tem raio de convergência R, então, para qualquer contorno γ em $B(z_0; R)$, de z_1 a z_2,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z_2 - z_0)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z_1 - z_0)^{n+1}.$$

Em particular, para qualquer contorno γ de z_0 a z, em $B(z_0; R)$, tem-se

$$\int_\gamma f(\xi)d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}.$$

Lema 6.1. *Se $f\colon D \to \mathbb{C}$ é contínua, $\gamma\colon [a,b] \to D$ é um contorno em D de comprimento L e $|f(z)| \leq M$ para todo o z no traço de γ, então*

$$\left| \int_\gamma f(z)\ dz \right| \leq ML.$$

Dem: Começaremos por provar que

$$\left| \int_a^b w(t)\ dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt, \tag{6.11}$$

para qualquer função w definida e contínua no intervalo $[a,b]$. Se $\int_a^b w(t)\ dt = 0$, então não há nada a provar; suponhamos, então, que $\int_a^b w(t)dt \neq 0$ e seja

$$\int_a^b w(t)\ dt = re^{i\theta}, \qquad r > 0.$$

Então,

$$\int_a^b e^{-i\theta} w(t)dt = r.$$

Seja

$$e^{-i\theta} w(t) = A(t) + iB(t)$$

com $A(t)$ e $B(t)$ funções reais. Vem, então, que

$$r = \int_a^b A(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} w(t))dt.$$

Mas,

$$\mathrm{Re}\, z \leq |\,\mathrm{Re}\, z| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

donde se conclui imediatamente que

$$r = \left| \int_a^b w(t)dt \right| \leq \int_a^b |w(t)|dt,$$

o que estabelece o resultado (6.11).

Suponhamos então que γ é um caminho suave (a demonstração no caso mais geral de γ ser um contorno decorre imediatamente da Definição 6.7). Então,

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)\ dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \left|\gamma'(t)\right|\ dt \\ &\leq M \int_a^b \left|\gamma'(t)\right|\ dt = ML, \end{aligned}$$

tal como queríamos provar. $\boxdot$

Algumas consequências do Teorema Fundamental da Integração de Contorno

Vimos na secção anterior que, se f é contínua e tem uma primitiva F num domínio D, então, para qualquer contorno γ em D de z_0 a z_1,

$$\int_\gamma f(z)\ dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Como consequência imediata deste resultado temos que, se γ é um contorno fechado, isto é, se $\gamma(a) = z_0 = z_1 = \gamma(b)$, então $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Por outro lado, para quaisquer dois pontos z_0 e z_1 em D, seja qual for o contorno γ em D de z_0 a z_1, o integral $\int_\gamma f(z)dz$ terá sempre o mesmo valor $(F(z_1) - F(z_0))$. No teorema seguinte provaremos que qualquer destas duas propriedades caracteriza a existência de uma primitiva para f em D.

Teorema 6.6. *Seja f uma função complexa definida e contínua num domínio D. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) a função f tem uma primitiva em D;

(ii) $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$, para qualquer contorno fechado γ em D;

(iii) $\int_\gamma f(z)dz$ *depende apenas dos pontos inicial e final de* γ*, para qualquer contorno* γ *em* D*, isto é, se* γ *e* $\tilde{\gamma}$ *são dois contornos em* D *com os mesmos pontos inicial e final, então*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\ dz.$$

Dem: Já provámos que *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

Para demonstrar que *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*, suponhamos que γ e $\tilde{\gamma}$ são dois quaisquer contornos em D de z_0 a z_1.

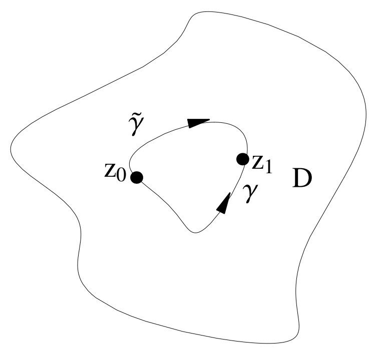


Figura 6.2: Contornos γ e $\tilde{\gamma}$ de z_0 a z_1

Então, $\gamma - \tilde{\gamma} := \gamma + (-\tilde{\gamma})$ é um contorno fechado, donde, por *(ii)*, $\int_{\gamma-\tilde{\gamma}} f(z)\ dz = 0$.

Mas,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma-\tilde{\gamma}} f(z)\ dz &= \int_\gamma f(z)\ dz + \int_{-\tilde{\gamma}} f(z)\ dz \\ &= \int_\gamma f(z)\ dz - \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\ dz\end{aligned}$$

e portanto segue-se que

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\ dz,$$

como queríamos demonstrar.

Demonstremos agora que *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Para tal, fixemos $z_0 \in D$ e consideremos a função F, definida em D, por

$$F(z) := \int_\gamma f(\xi)\, d\xi\ , \quad z \in D, \tag{6.12}$$

onde γ é um (qualquer) contorno em D que una z_0 a z.

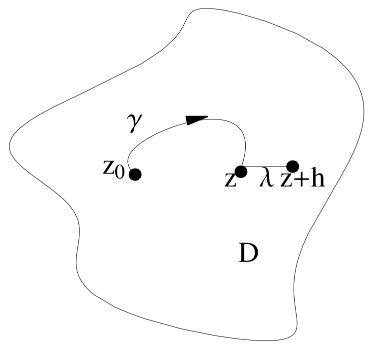


Figura 6.3: Contorno γ e segmento λ

Recorde que, por hipótese, D é um domínio, portanto tal contorno existe sempre; além disso, de acordo com *(iii)*, a função F está bem definida, porque $\int_\gamma f(\xi)\, d\xi$ não depende do contorno escolhido para "ir"de z_0 a z. A nossa finalidade é mostrar que a função F assim definida é uma primitiva de f, ou seja, que $F'(z) = f(z), \forall z \in D$.

Seja, então, $z \in D$. Como D é aberto, então, para ϵ_1 suficientemente pequeno, se $h \in \mathbb{C}$ é tal que $|h| < \epsilon_1$, o segmento de recta $\lambda(t) = z + th$ $(0 \leq t \leq 1)$ está contido em D; além disso, o contorno $\gamma + \lambda$ une z_0 a $z + h$. Assim,

$$F(z+h) = \int_{\gamma+\lambda} f(\xi)\, d\xi = \int_\gamma f(\xi)\, d\xi + \int_\lambda f(\xi)\, d\xi.$$

Então,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_\lambda f(\xi)\, d\xi. \tag{6.13}$$

Por outro lado, temos

$$\int_\lambda \frac{f(z)}{h}\, d\xi = \frac{f(z)}{h}(z+h-z) = f(z), \tag{6.14}$$

uma vez que, para qualquer constante $c \in \mathbb{C}$ e para qualquer contorno γ de z_1 a z_2, se tem

$$\int_\gamma c\, dz = c(z_2 - z_1).$$

De (6.13) e (6.14) decorre imediatamente que

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \int_\lambda \left(\frac{f(\xi)-f(z)}{h}\right) d\xi. \tag{6.15}$$

Como f é contínua, então, dado $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ (que, obviamente, podemos considerar menor que ϵ_1) tal que

$$|z-\xi| < \delta \implies |f(z)-f(\xi)| < \epsilon,$$

de tal modo que, quando $|h| < \delta$, para qualquer ξ no segmento de recta λ, a função integranda em (6.15) satisfaz $\left|\frac{f(\xi)-f(z)}{h}\right| < \epsilon/|h|$. O comprimento de λ é $|h|$ e portanto, usando o Lema 6.1, vem que

$$\left|\int_\lambda \left(\frac{f(\xi)-f(z)}{h}\right)\, d\xi\right| < \frac{\epsilon}{|h|}|h| = \epsilon.$$

Temos então que, para $\epsilon > 0$ escolhido arbitrariamente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que,

$$|h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \epsilon$$

ou seja, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z),$$

o que mostra que $F'(z) = f(z)$, tal como desejávamos provar. $\boxdot$

6.3 Teorema de Cauchy

Retomemos a Definição 6.7 de integral de uma função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ao longo de um caminho γ definido por $\gamma(t) = (x(t), y(t)),\quad t \in [a,b]$,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \tag{6.16}$$

e vejamos qual a sua relação com a definição de integral de linha para funções reais de duas variáveis reais. Comecemos por relembrar que, dado um campo vectorial $\mathbf{V} = (V_1(x,y), V_2(x,y))$ com $V_1(x,y)$ e $V_2(x,y)$ funções reais das variáveis reais x e y, contínuas num certo domínio D, e dada uma curva suave $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ em D, o integral de (linha) de $\mathbf{V}$ ao longo de γ, denotado por, $\int_\gamma V_1\ dx + V_2\ dy$ é dado por

$$\int_\gamma V_1\ dx + V_2\ dy := \int_a^b \left[V_1\left(x(t), y(t)\right)\ x'(t) + V_2\left(x(t), y(t)\right)\ y'(t)\right] dt. \tag{6.17}$$

Consideremos então o integral (6.16)

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b & f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt \\
= \int_a^b & [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \left(x'(t) + iy'(t)\right)\ dt \\
= \int_a^b & \left[u(x(t), y(t))\ x'(t) - v(x(t), y(t))\ y'(t)\right]\ dt \\
+ i \int_a^b & \left[v(x(t), y(t))\ x'(t) + u(x(t), y(t))\ y'(t)\right]\ dt \\
= \int_\gamma & (u\ dx - v\ dy) + i \int_\gamma (v\ dx + u\ dy).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Nota: O resultado (6.18) é fácil de fixar, se escrevermos **formalmente**

$$f(z)\ dz = (u + iv)\ (dx + idy) = (u\ dx - v\ dy) + i(v\ dx + u\ dy).$$

Relembre que um caminho $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ é um caminho simples se não se intersectar a si mesmo, excepto possivelmente nos seus pontos inicial e final. Um caminho simples é também chamado um **arco de Jordan**. Um arco de Jordan fechado costuma designar-se por **curva fechada de Jordan** ou, por vezes, apenas por **curva de Jordan**. Se γ for um contorno (isto é, relembre, uma soma finita de caminhos suaves) e for fechado e simples, γ é dito um **contorno fechado de Jordan**.

O chamado *Teorema da Curva de Jordan* estabelece que cada curva fechada de Jordan tem um *interior* e um *exterior*. Mais precisamente, esse teorema estabelece que se γ é uma curva fechada de Jordan, então o conjunto aberto $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ tem exactamente duas componentes conexas D_1 e D_2 tais que $\mathrm{fr}(D_1) = \mathrm{fr}(D_2) = \{\gamma\}$. Um destes domínios é limitado e chama-se o **interior** de γ $(I(\gamma))$; o outro domínio é ilimitado e chama-se o **exterior** de γ $(O(\gamma))$. O resultado estabelecido neste teorema, embora parecendo evidente (veja Fig. 6.4) é de demonstração analítica bastante difícil, pelo que nos contentaremos aqui em o aceitar como verdadeiro; para a sua demonstração veja, por exemplo, [Why64].

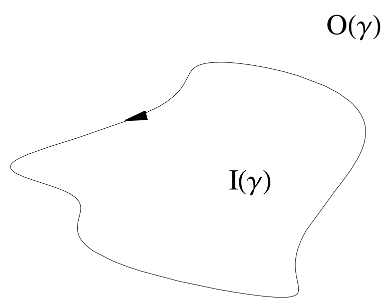


Figura 6.4: Interior e exterior de uma curva de Jordan

Sendo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um contorno fechado de Jordan, dizemos que γ é orientado positivamente se, "ao deslocarmo-nos ao longo de γ", (isto é, ao acharmos as imagens de pontos da curva deixando que t percorra $[a, b]$) o interior de γ se situe à sua esquerda. [1] Caso contrário, dizemos que γ é orientado negativamente. Na demonstração do chamado *Teorema de Cauchy* que iremos apresentar nesta secção, faremos uso do Teorema de Green no plano, cuja demonstração pode ser vista em qualquer livro básico de análise de várias variáveis, e que relembramos agora.

Teorema 6.7 (Teorema de Green no plano)**.** *Seja γ um contorno fechado de Jordan orientado positivamente. Se $P(x, y), Q(x, y)$ e as derivadas parciais $Q_x(x, y)$ e $P_y(x, y)$ são*

[1] De uma forma mais rigorosa, para cada $t \in (a, b)$ em que exista e seja não nula a derivada $\gamma'(t)$, o vector $i\gamma'(t)$, obtido rodando o vector tangente $\gamma'(t)$ de 90^o no sentido directo – vector, portanto, "normal" à curva no ponto $\gamma(t)$ – aponta para o interior de γ.

contínuas em $I(\gamma) \cup \{\gamma\}$, então

$$\int_\gamma P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \iint_{I(\gamma)} [Q_x(x,y) - P_y(x,y)]\ dx\ dy. \tag{6.19}$$

Teorema 6.8 (Teorema de Cauchy)**.** *Se $f \colon D \to \mathbb{C}$ é derivável com derivada f' contínua num domínio D e se γ é um contorno fechado de Jordan tal que γ e $I(\gamma)$ estão contidos em D, então*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0.$$

Dem: Seja $f = u + iv$. Então, como vimos em (6.18), temos

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_\gamma (u\ dx - v\ dy) + i \int_\gamma (u\ dy + v\ dx).$$

Aplicando o Teorema de Green a cada um dos integrais de linha do segundo membro, vem

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \iint_{I(\gamma)} (-v_x - u_y) dx\ dy + i \iint_{I(\gamma)} (u_x - v_y) dx\ dy.$$

Em virtude das equações de Cauchy–Riemann, as funções integrandas dos integrais duplos são identicamente nulas, donde se obtém

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0$$

como desejávamos. $\boxdot$

No Teorema de Cauchy exigiu-se, e usou-se na demonstração, o facto de f' ser contínua e de o contorno γ ser simples, para que o Teorema de Green pudesse ser utilizado. Uma versão mais precisa do Teorema de Cauchy – vulgarmente conhecida por Teorema de Cauchy-Goursat – não requer que γ seja simples nem que f' seja contínua (na realidade, a continuidade de f' seguir-se-á automaticamente).

Teorema 6.9 (Teorema de Cauchy-Goursat)**.** *Se $f \colon D \to \mathbb{C}$ é derivável num domínio D e se γ é um contorno fechado tal que $\{\gamma\}$ e $I(\gamma)$ [2] estão contidos em D, então*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0.$$

[2] Se γ não é uma curva de Jordan nem sempre é intuitivamente óbvio o que constitui o interior e o exterior de γ não sendo estes conjuntos necessariamente conexos. Uma definição precisa de $I(\gamma)$ e $O(\gamma)$ poderá fazer-se usando outros conceitos, como o de "índice de uma curva a respeito de um ponto", os quais , por limitações de tempo, não introduziremos neste curso.

A demonstração deste teorema é longa, pelo que não a incluiremos aqui; pode consultá-la, por exemplo, em [MH01, pp. 226-227].

Definição 6.11. *Um domínio D diz-se* **simplesmente conexo** *se, dada qualquer curva fechada simples γ contida em D, o interior de γ também estiver contido em D. Um domínio D diz-se multiplamente conexo se não é simplesmente conexo; ver Fig. 6.6.*

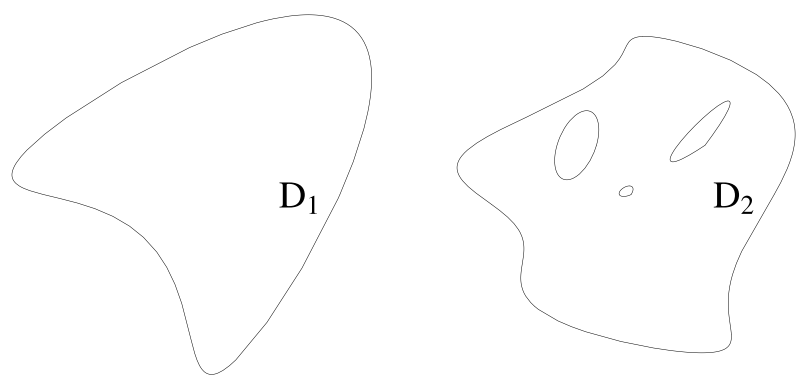


Figura 6.5: D_1 - simplesmente conexo; D_2- multiplamente conexo

Intuitivamente, um domínio simplesmente conexo não tem "buracos".

O teorema de Cauchy-Goursat tem, assim, o seguinte corolário imediato.

Corolário 6.1. *Seja f derivável num domínio simplesmente conexo D e seja γ um contorno fechado contido em D. Então*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Teorema 6.10 (Deformação do contorno)**.** *Sejam γ_1 e γ_2 dois contornos fechados simples orientados positivamente tais que $\{\gamma_1\}$ está contido no interior de γ_2 e seja R o domínio que é a intersecção do exterior de γ_1 com o interior de γ_2. Se f é derivável num domínio que contém $\{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\} \cup R$, então*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz. \tag{6.20}$$

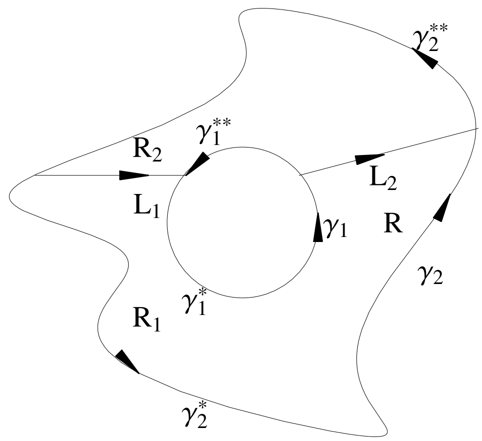


Figura 6.6: Figura relativa ao Teorema 6.10.

Dem: Seja L_1 um segmento de recta que une $\{\gamma_2\}$ a $\{\gamma_1\}$ e L_2 um segmento que une $\{\gamma_1\}$ a $\{\gamma_2\}$, tal como se ilustra na figura seguinte; o contorno γ_1 é "partido"em dois contornos γ_1^* e γ_1^{**}, o mesmo sucedendo a γ_2. Sejam K_1 e K_2 os seguintes contornos:

$$K_1 = L_1 + \gamma_1^* + L_2 - \gamma_2^*,$$
$$K_2 = -\gamma_2^{**} - L_2 + \gamma_1^{**} - L_1.$$

Como f é derivável sobre e no interior de cada um destes contornos, podemos aplicar o Teorema de Cauchy-Goursat para concluir que

$$\int_{K_1} f(z)\ dz = \int_{K_2} f(z)\ dz = 0,$$

ou seja que

$$\int_{K_1+K_2} f(z)\ dz = 0.$$

Mas,

$$K_1 + K_2 = L_1 + \gamma_1^* + L_2 - \gamma_2^* - \gamma_2^{**} - L_2 + \gamma_1^{**} - L_1.$$

Logo, usando (6.3) e (6.7), podemos concluir que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{K_1+K_2} f(z)\ dz \\
&= \int_{L_1+\gamma_1^*+L_2-\gamma_2^*-\gamma_2^{**}-L_2+\gamma_1^{**}-L_1} f(z)\ dz \\
&= \int_{\gamma_1^*+\gamma_1^{**}-\gamma_2^*-\gamma_2^{**}} f(z)\ dz \\
&= \int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)\ dz
\end{aligned}$$

e o resultado pretendido segue de imediato. $\boxdot$

O teorema de Cauchy-Goursat pode generalizar-se da forma seguinte envolvendo a fronteira de domínios multiplamente conexos.

Teorema 6.11 (Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos)**.** *Sejam γ um contorno fechado orientado positivamente e $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ um número finito de contornos orientados negativamente (cujos traços) não se intersectam dois a dois e ficam inteiramente no interior de γ. Seja D o domínio que é intersecção do interior de γ com o exterior de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ e seja Γ (um contorno que corresponde à) a fronteira de D, isto é, um contorno cuja imagem é a união de $\{\gamma\}, \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \ldots, \{\gamma_n\}$. Então, se f é derivável em D e sobre a sua fronteira $\{\Gamma\}$, tem-se*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Dem: A demonstração é análoga à do Teorema da Deformação do Contorno, envolvendo apenas a introdução de mais "cortes" $L_1, \ldots, L_{n+1}$, sendo deixada ao cuidado dos alunos. $\boxdot$

6.4 Fórmula integral de Cauchy

Teorema 6.12 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Seja z_0 um ponto fixo do plano. Se γ é um contorno fechado simples orientado positivamente que contém z_0 no seu interior e se f é uma função derivável num domínio D contém $\{\gamma\} \cup I(\gamma)$, então*

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\ dz} \tag{6.21}$$

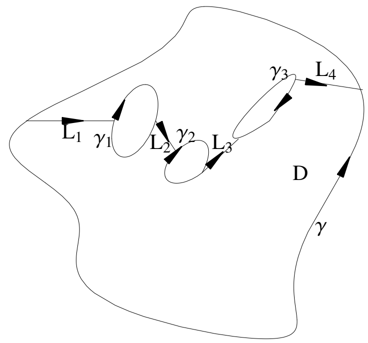


Figura 6.7: Figura do Teorema 6.11 ($n = 3$)

Dem: Seja $\gamma_r \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ (isto é, seja γ_r uma circunferência de centro no ponto z_0 e raio r, orientada positivamente), com r escolhido suficientemente pequeno para que $\{\gamma_r\}$ esteja contido em $I(\gamma)$. Então, a função $f(z)/(z - z_0)$ é derivável sobre $\{\gamma\}$, sobre $\{\gamma_r\}$ e no interior da região multiplamente conexa delimitada por $\{\gamma\}$ e $\{\gamma_r\}$; ver Fig. 6.8. Aplicando o Teorema da Deformação do Contorno, podemos concluir

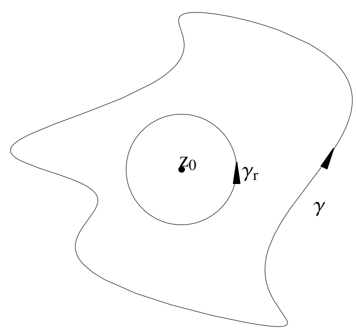


Figura 6.8: Contorno γ e contorno γ_r

que

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0.$$

Temos, então

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-z_0}\,dz + \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz.$$

Mas (reveja Exemplo 6.2),

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i.$$

(Note-se que o resultado anterior é válido independentemente do valor de r escolhido). Para estabelecer (6.21), resta-nos mostrar que $\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz = 0$. Como f é contínua em z_0, dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que, para $|z-z_0| < \delta$ se tem $|f(z)-f(z_0)| < \epsilon$. Então, escolhendo $r < \delta$, tem-se, para $z \in \{\gamma_r\}$, que $|z-z_0| = r < \delta$, donde se conclui (usando o Lema 6.1 e tendo em atenção o Exemplo 6.3) que

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| < \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\epsilon.$$

Como ϵ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, segue-se que $\int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = 0$, tal como pretendíamos. $\boxdot$

A fórmula (6.21) é conhecida por **fórmula integral de Cauchy**. Ela mostra que, se f é derivável sobre a imagem de um contorno fechado simples e no seu interior, então o valor de f em qualquer ponto interior ao contorno fica completamente determinado pelos valores que f assume no contorno.

6.5 Exercícios

Nota: Salvo indicação em contrário, as integrações de contorno são sempre efectuadas supondo que o contorno referido é simples e orientado positivamente; por uma questão de simplicidade, confundimos, por vezes, o contorno com o seu traço.

Exercício 6.1. Calcule, usando a definição:

a) $\int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz$, onde $\gamma :=$ quadrado de vértices z_1, z_2, z_3, z_4, com $z_1 = 0, z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$ e $z_4 = i$.

b) $\displaystyle\int_\gamma e^z \, dz$, onde $\gamma :=$ a parte da circunferência unitária unindo 1 a i.

c) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z} \, dz$, onde $\gamma :=$ circunferência unitária .

d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz$, onde $\gamma :=$ circunferência unitária.

Exercício 6.2. Seja γ a semi-circunferência unitária superior. Mostre que

$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz\right| \leq \pi e.$$

Exercício 6.3. **Integração por partes** Sejam f e g funções com derivada num domínio D e seja γ um contorno em D de z_1 a z_2. Prove que

$$\int_\gamma f(z)g'(z) \, dz = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_\gamma f'(z)g(z) \, dz.$$

Exercício 6.4. Utilize o exercício anterior para calcular:

a) $\displaystyle\int_\gamma z \operatorname{sen} z \, dz; \qquad \gamma(t) = e^{it}, \ 0 \leq t \leq \pi/2$

b) $\displaystyle\int_\gamma z e^{iz} \, dz; \qquad \gamma(t) = e^{it}, \ 0 \leq t \leq \pi/2$

c) $\displaystyle\int_\gamma z^2 \operatorname{sen} z \, dz; \qquad \gamma(t) = e^{it}, \ 0 \leq t \leq \pi/2$

Exercício 6.5. Calcule:

a) $\displaystyle\int_\gamma (z^3 + z) \, dz; \qquad \gamma(t) = e^{it}, \ 0 \leq t \leq \pi$

b) $\displaystyle\int_\gamma (z^3 + 3z) \, dz; \qquad \gamma(t) = e^{it}, \ 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\displaystyle\int_\gamma e^{1/z} \, dz;$ $\qquad \gamma :=$ circ. de centro em $z = 1 + 5i$ e raio 3.

Exercício 6.6. Seja $\gamma = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_1]$, onde $z_1 = 2+2i$, $z_2 = -2+2i$, $z_3 = -2-2i$ e $z_4 = 2-2i$. Calcule:

$$a) \int_\gamma \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi}{2}i}\, dz; \qquad b) \int_\gamma \frac{\cos z}{z\,(z^2+8)}\, dz; \qquad c) \int_\gamma \frac{z}{2z+1}\, dz$$

Exercício 6.7. Calcule:

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz; \qquad \gamma(t) = 3e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi\ .$$

Exercício 6.8. *a)* Calcule $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$, onde:

(i) $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}$, tal que $\gamma(t) = e^{it}$;

(ii) $\gamma : [\pi/2, 3\pi/2] \to \mathbb{C}$, tal que $\gamma(t) = e^{i(\pi - t)}$;

b) Diga por que razão os resultados anteriores anteriores mostram que a função $f(z) = 1/z$ não admite uma primitiva no conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exercício 6.9. Sejam f e g duas funções definidas e analíticas num domínio D e seja γ um contorno simples tal que $\{\gamma\} \cup I(\gamma) \subset D$. Mostre que, se $f(z) = g(z)$ para todo o $z \in \{\gamma\}$, então $f(z) = g(z)$ para todo o $z \in I(\gamma)$.

7. Séries de Taylor

...mathematical proofs, like diamonds, are hard and clear,
and will be touched with nothing but strict reasoning.

John Locke

cit. em D. Burton, *Elementary Number Theory* (1980).

7.1 Série de Taylor

Vimos, na Secção 4.12, que uma função f definida por uma série de potências em torno de um ponto z_0 é uma função analítica em z_0 e que, além disso, essa série é, então, a série de Taylor dessa função f em torno desse ponto. O teorema que se segue é uma espécie de recíproco desse resultado.

Teorema 7.1 (Teorema de Taylor)**.** *Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto fixo de $\mathbb{C}$ e suponhamos que f é uma função analítica em z_0. Então, existe $R > 0$, tal que:*

- *f é infinitamente derivável em $B(z_0; R)$;*
- *em $B(z_0, R)$, a função f admite uma expansão em série de Taylor, isto é, uma expansão em série de potências da forma*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{7.1}$$

com

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0); \tag{7.2}$$

- *se* $0 < r < R$ *e* $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, *os coeficientes (7.2) da expansão em série de Taylor de* f *podem ser calculados por*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi. \tag{7.3}$$

Dem: Recorde que, de acordo com a Definição 4.2, se f é analítica em z_0, então f é derivável numa certa bola centrada em z_0, ou seja, existe $R > 0$ tal que f é derivável em $B(z_0; R)$.

Seja $0 < r < R$, de modo que $\overline{B}(z_0; r) \subset B(z_0; R)$. Então, de acordo com o Teorema 6.12, temos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi,$$

para qualquer z tal que $|z - z_0| < r$. Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} \\
&= \frac{1}{\xi - z_0} \times \frac{1}{1 - (\frac{z - z_0}{\xi - z_0})} \\
&= \frac{1}{\xi - z_0} \left[1 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right) + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^m + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^{m+1}}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)} \right] \\
&= \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{(z - z_0)}{(\xi - z_0)^2} + \cdots + \frac{(z - z_0)^m}{(\xi - z_0)^{m+1}} + \frac{(z - z_0)^{m+1}}{(\xi - z_0)^{m+1}(\xi - z)},
\end{aligned}$$

donde, temos

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\xi) \left[\frac{1}{\xi - z_0} + \frac{(z - z_0)}{(\xi - z_0)^2} + \cdots + \frac{(z - z_0)^m}{(\xi - z_0)^{m+1}} + \frac{(z - z_0)^{m+1}}{(\xi - z_0)^{m+1}(\xi - z)} \right] d\xi \\
&= \sum_{n=0}^{m} a_n (z - z_0)^n + A_m, \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \ldots, m, \tag{7.5}$$

e

$$A_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)(z-z_0)^{m+1}}{(\xi-z_0)^{m+1}(\xi-z)}d\xi. \tag{7.6}$$

Vamos provar agora que $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = 0$.

Notamos primeiramente que, sendo f derivável, f é contínua, de modo que $\phi(t) = |f(\gamma_r(t))|$ é uma função real contínua definida no intervalo $[0, 2\pi]$. Assim, $\phi(t)$ é limitada, ou seja, $\exists M : \phi(t) \leq M$. Isto significa que $|f(\xi)| \leq M$ para ξ em γ_r. Por outro lado, $|\xi - z_0| = r$ e $|z - z_0| < r$, donde

$$|\xi - z| = |\xi - z_0 - (z - z_0)| \geq |\ |\xi - z_0| - |z - z_0|\ | = r - |z - z_0|.$$

Aplicando o Lema 6.1 e tendo en conta o Exemplo 6.3, concluímos que

$$\begin{aligned} |A_m| &\leq \frac{1}{2\pi} M \frac{|z-z_0|^{m+1}}{r^{m+1}\left(r - |z-z_0|\right)} 2\pi r \\ &= \frac{M|z-z_0|}{r - |z-z_0|}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^m \end{aligned}$$

e, como $|z - z_0| < r$, tem-se que $|A_m| \to 0$ quando $m \to \infty$. Então, vem

$$\lim_{m\to\infty}\left(f(z) - \sum_{n=0}^{m} a_n(z-z_0)^n\right) = 0$$

ou seja, temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{7.7}$$

para $z \in B(z_0; r)$.

Como os coeficientes a_n são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi, \tag{7.8}$$

segue-se que eles são independentes de z, ou seja, (7.7) é uma série de potências, a qual converge para z tal que $|z - z_0| < r$. Por outro lado, concluímos imediatamente do Corolário 4.1 que a função é derivável para $z \in B(z_0; r)$ e que

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),$$

o que também mostra que os coeficientes a_n são independentes de γ_r e, portanto, independentes de r. Como r foi escolhido arbitrariamente satisfazendo $r < R$, temos que a expressão em série de potências (7.7) é válida para $z \in B(z_0; R)$.

Como consequência imediata do teorema anterior, têm-se os seguintes corolários.

Corolário 7.1. *Se f é derivável num domínio D e $z_0 \in D$, então f tem uma expansão em série de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ válida para $z \in B(z_0; R)$ onde*

$$R = d(z_0, \mathrm{fr}(D)) := \inf\{|z - z_0| : z \in \mathrm{fr}(D)\}.$$

Dem: Como $R = \inf\{|z - z_0| : z \in \mathrm{fr}(D)\}$, então $B(z_0; R) \subset D$, donde f é derivável em $B(z_0; R)$. O resultado decorre imediatamente seguindo a demonstração do teorema anterior. $\boxdot$

Corolário 7.2. *Se f é derivável num domínio D, então f é infinitamente derivável em D.*

Dem: Dado $z_0 \in D$, existe $R > 0$ tal que $B(z_0; R) \subset D$. Então, de acordo com o teorema anterior, f é infinitamente derivável em $B(z_0; R)$. $\boxdot$

Corolário 7.3 (Fórmula integral de Cauchy generalizada)**.** *Se f é derivável num domínio D que contém a bola fechada $\overline{B}(z_0; r)$, então*

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,} \tag{7.9}$$

onde $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$.

Nota:

- No corolário anterior, a circunferência γ_r pode ser substituída por qualquer outro contorno fechado simples γ contendo z_0 no seu interior e tal que $\{\gamma\} \cup I(\gamma)$ esteja contido em D.
- Acabámos de ver que uma função complexa f é analítica num **domínio** se e só se é derivável nesse domínio, podendo, portanto, os dois termos ser usados como sinónimos um do outro. Esta situação é totalmente distinta do que se passa em $\mathbb{R}$.

Exemplo 7.1. *Recordamos a utilização do comando* **Series** *do Mathematica na determinação (de alguns termos) da expansão em série de Taylor de uma função.*

```
Series[Sin[z], {z, π / 4, 6}]
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2\sqrt{2}} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{6\sqrt{2}} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^4}{24\sqrt{2}} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^5}{120\sqrt{2}} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^6}{720\sqrt{2}} + O\left[z - \frac{\pi}{4}\right]^7$$

Teorema 7.2 (Estimativa de Cauchy)**.** *Se f é derivável num domínio D que contém $\overline{B}(z_0; r)$ e, além disso, $|f(z)| \leq M$ para todo o z em $C_r(z_0) = \{z : |z - z_0| = r\}$, então*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Dem: Pelo Corolário 7.3,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

onde $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$. Então, usando o Lema 6.1 e o Exemplo 6.3, podemos concluir que

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n},$$

tal como se pretendia provar. ⊡

Teorema 7.3 (Teorema de Morera)**.** *Se f é contínua num domínio D e $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para todo o contorno fechado γ em D, então f é derivável em D.*

Dem: Já provámos que, se $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para todo o contorno fechado γ em D, então existe uma primitiva F de f em D, ou seja, existe uma função F em D, derivável em D e tal que $F'(z) = f(z)$, para todo o $z \in D$ (Teorema 6.6). Mas, sendo F derivável em D, F é infinitamente derivável em D (Corolário 7.2). Então, em particular, F' é derivável, ou seja, f é derivável. ⊡

Teorema 7.4 (Teorema de Liouville)**.** *Se f é derivável e limitada em todo o plano complexo, então f é constante em $\mathbb{C}$.*

Dem: Suponhamos, então, que f é derivável em todo o plano complexo e que $|f(z)| \leq M$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. Então, de acordo com a *estimativa de Cauchy* (caso $n = 1$), como f é derivável em qualquer disco $B(z; r)$, tem-se

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

Como r pode ser escolhido arbitrariamente grande, tem-se $|f'(z)| = 0$, ou seja $f'(z) = 0$, para todo o $z \in \mathbb{C}$. O resultado do teorema segue-se imediatamente aplicando o Teorema 4.6.

Como consequência imediata do Teorema de Liouville, pode facilmente provar -se o importante teorema que se segue.

Teorema 7.5 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Se* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *é um polinómio não constante, então existe* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tal que* $p(\alpha) = 0$.

Dem: Vamos fazer a demonstração por redução ao absurdo, ou seja, vamos mostrar que, se admitirmos que, para todo o $z \in \mathbb{C}$, $p(z) \neq 0$, isto nos conduz a uma contradição.

Suponha-se, então, que $p(z) \neq 0$ para todo o $z \in \mathbb{C}$ e considere-se função $f(z) = 1/p(z)$. Então, f é derivável em todo o plano complexo. Como, por hipótese, p não é constante, também f não é constante, e, então f não pode ser limitada, pelo Teorema de Liouville. Mas, é imediato verificar que

$$\lim_{z \to \infty} p(z) = \lim_{z \to \infty} z^n \left(a_n + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}\right) = \infty,$$

donde se segue ,

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{p(z)} = 0.$$

Tem-se, então, que

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(z)| < \epsilon.$$

Isto significa que $f(z)$ é limitada fora do círculo $B(0; 1/\delta)$. Mas, f é contínua em $\overline{B}(0; 1/\delta)$. Como $\overline{B}(0; 1/\delta)$ é compacto, segue-se que f é limitada aí (para concluir este resultado note que a aplicação $\phi = |f|$ é uma função real contínua num conjunto compacto, logo é limitada). Então, podemos concluir que f é limitada em todo o plano complexo, o que é uma contradição. $\boxdot$

7.2 Zeros de funções analíticas

Definição 7.1. *Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função e z_0 um ponto em D. Se z_0 é tal que $f(z_0) = 0$, então dizemos que z_0 é um* **zero** *da função f.*

No que se segue, vamos supor que f é uma função *analítica* num dado domínio D e que $z_0 \in D$ é um zero de f. Seja ainda $R = d(z_0, \mathrm{fr}(D)) = \inf\{|z - z_0| : z \in \mathrm{fr}(D)\}$. Então, f admite uma expansão em série de Taylor em torno do zero z_0 (válida em $B(z_0; R)$), isto é, temos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{para} \quad z \in B(z_0; R). \tag{7.10}$$

Então, tem-se

$$a_0 = f(z_0) = 0, \tag{7.11}$$

e dois factos podem ocorrer:

- ou todos os outros a_i são iguais a zero, caso em que $f(z) \equiv 0$ em $B(z_0; R)$;
- ou existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

  $$a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0 \ \text{ e } a_m \neq 0,$$

  caso em que será

  $$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ a_m \neq 0, \quad \text{para} \quad z \in B(z_0; R). \tag{7.12}$$

Neste último caso, dizemos que z_0 é um **zero de ordem** m de f. É imediato concluir que z_0 é um zero de ordem m de f se e só se

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \ \text{ e } \ f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Além disso, z_0 é um zero de ordem m se e só se

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad \text{para} z \quad \in B(z_0; R),$$

onde

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n$$

é uma função analítica em $B(z_0; R)$ e tal que $g(z_0) = a_m \neq 0$.

Definição 7.2. *Seja f uma função analítica num domínio D e seja $z_0 \in D$ um zero de f. Se existe um disco centrado em z_0 no qual não existem outros zeros de f, isto é, se*

$$\exists \delta > 0 \ \forall z \in D \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow f(z) \neq 0,$$

dizemos que z_0 é um **zero isolado** *de f.*

Lema 7.1. *Seja f uma função analítica num domínio D e seja $z_0 \in D$ um zero de ordem finita de f. Então z_0 é um zero isolado de f.*

Dem: Seja m a ordem do zero z_0. Temos, então, que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \ \ \text{para} z \in B(z_0; R),$$

$(R = d(z_0; \mathrm{fr}(D)))$ onde g é derivável em $B(z_0; R)$ e $g(z_0) \neq 0$. Então, g é contínua em z_0, de modo que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \forall z \in D \qquad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |g(z) - g(z_0)| < \epsilon.$$

Seja $\epsilon = \frac{1}{2}|g(z_0)|$. Então, temos que, para $0 < |z - z_0| < \delta$,

$$|g(z)| \geq ||g(z_0) - |g(z_0) - g(z)|| > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

Em particular, temos que $g(z) \neq 0$. Mas, se $0 < |z - z_0| < \delta$, então $|z - z_0|^m \neq 0$, donde

$$f(z) = g(z)(z - z_0)^m \neq 0,$$

como desejávamos provar. $\boxdot$

Corolário 7.4. *Seja f uma função analítica num domínio D e seja $S \subset D$ um conjunto de zeros de f. Se S tem um ponto de acumulação z_0 em D, então f é identicamente nula em $B(z_0; R)$, onde $R = d(z_0; \mathrm{fr}(D))$.*

Como f é contínua em z_0, então tem-se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \forall z \in D \quad z \in B(z_0; \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Mas $z_0 \in D$ é um ponto de acumulação de S, ou seja, podemos garantir que na bola $B(z_0; \delta)$ existe um ponto $w \in S$, $w \neq z_0$. Assim sendo, tem-se

$$\forall \epsilon > 0 \exists w \in S : |f(w) - f(z_0)| = |0 - f(z_0)| = |f(z_0)| < \epsilon,$$

o que mostra que $|f(z_0)| = 0$, pelo que z_0 é um zero de f. Este zero é, naturalmente, não isolado, pois qualquer bola centrada em z_0 contém pontos de S (para além de z_0), ou seja, contém outros zeros de f. Então, pelo lema anterior, z_0 não pode ter ordem finita, donde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{para} \quad z \in B(z_0; R),$$

com todos os coeficientes a_i iguais a zero, ou seja $f(z) \equiv 0$ em $B(z_0; R)$. $\boxdot$

Teorema 7.6. *Se f é analítica num domínio D e existe um conjunto $S \subset D$ de zeros de f com um ponto de acumulação z_0 em D, então f é identicamente nula em D.*

Dem: Pelo Corolário 7.4, temos que $f(z) = 0$ para todo o z na bola $B(z_0; R)$ onde $R = d(z_0, \text{fr}(D))$. Para qualquer outro $z \in D$, escolhamos um caminho $\gamma : [a, b] \to D$, de z_0 a z.

Vamos mostrar que $f(\gamma(t)) = 0$ para todo o $t \in [a, b]$ donde, em particular, $f(\gamma(b)) = f(z) = 0$. Claramente se vê que $\exists \delta > 0$ tal que, para t satisfazendo $a \leq t < a + \delta$, se tem $\gamma(t) \in B(z_0; R)$. Donde, $f(\gamma(t)) = 0$, para $a \leq t < a + \delta$. Seja

$$s = \sup\{x \in [a, b] : f(\gamma(t)) = 0 \text{ para } a \leq t < x\}.$$

Então, $a + \delta \leq s \leq b$. Por continuidade, $f(\gamma(s)) = 0$. Vamos ver que $s = b$. Suponhamos que $s < b$. Como $\gamma(s)$ é um zero não isolado, f é identicamente nula numa vizinhança de $\gamma(s)$ donde, existe um intervalo $[s, s + k]$ tal que, para $t \in [s, s + k]$, $f(\gamma(t)) = 0$. Mas isto contradiz a definição de s. Logo, $s = b$ e $f(z) = f(\gamma(s)) = 0$, como queríamos provar. $\boxdot$

Teorema 7.7 (Teorema da identidade)**.** *Se f e g são duas funções analíticas num domínio D que coincidem num conjunto de pontos com um ponto de acumulação em D, então f e g são idênticas em D, isto é, $f(z) = g(z)$, para todo o $z \in D$.*

Dem: Basta aplicar o teorema anterior à função $f - g$. $\boxdot$
indexteorema@Teorema!da identidade

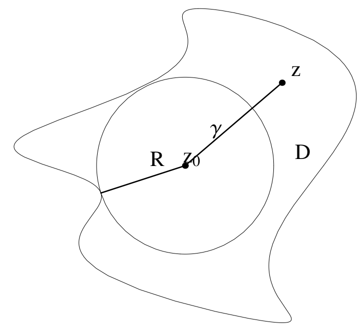


Figura 7.1: Contorno γ e contorno γ_r

7.3 Teorema do módulo máximo

Como os números complexos não são ordenados, não podemos falar acerca de máximos e mínimos de uma função complexa f. No entanto, podemos considerar os valores máximos e mínimos da função $|f|$.

Definição 7.3. *Dada uma função $f : D \to \mathbb{C}$ dizemos $|f|$ tem um máximo (respectivamente mínimo) local em $z_0 \in D$ se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0;\epsilon) \subset D$ e $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo o z em $B(z_0;\epsilon)$ (respectivamente $|f(z)| \geq |f(z_0)|,\ \forall z \in B(z_0;\epsilon)$).*

Teorema 7.8 (Teorema do módulo máximo)**.** *Seja D um domínio e $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica em D. Se $|f|$ tem um máximo local em $z_0 \in D$, então f é constante em D.*

Dem: Seja ϵ tal que $B(z_0;\epsilon) \subset D$ e $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo o z em $B(z_0;\epsilon)$; seja, ainda, r tal que $0 < r < \epsilon$. Então, a circunferência $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ está contida em $B(z_0;\epsilon)$ de modo que $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$ para todo o $t \in [0, 2\pi]$. Pela fórmula integral de Cauchy, temos

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}}.ire^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})dt, \end{aligned}$$

donde se obtém

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{it})|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|dt = |f(z_0)|.$$

Temos, assim

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{it})|dt$$

ou seja, temos

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[|f(z_0)| - |f(z_0+re^{it})|]dt.$$

Como a função integranda é não-negativa, podemos concluir que

$$|f(z_0)| = |f(z_0+re^{it})|, \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

A igualdade anterior é válida para qualquer r tal que $r < \epsilon$, ou seja, $|f|$ é constante em $B(z_0;\epsilon)$. Segue-se do Teorema 4.7 que f é constante em $B(z_0;\epsilon)$ e o Teorema da Identidade garante que f é constante em D, tal como pretendíamos provar. $\boxdot$

Suponhamos que D é um domínio limitado e que f é analítica em D e contínua em $\overline{D} = D \cup \partial D$. Como $\overline{D}$ é um conjunto compacto, sabemos da Análise Real que a função $|f|$ atinge em $\overline{D}$ um máximo absoluto, isto é, existe $z_0 \in \overline{D}$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, para todo o $z \in \overline{D}$. O teorema anterior garante que, não sendo f constante, tal máximo só pode ser atingido em pontos da fronteira de D, ou seja, nesse caso, tem-se

$$\max\{|f(z)| \ : \ z \in \overline{D}\} = \max\{|f(z)| \ : \ z \in \partial D\}.$$

7.4 Exercícios

Exercício 7.1. Calcule os seguintes integrais:

a)

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz,$$

onde $\gamma(t) = 3e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

b)

$$\int_\gamma \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz,$$

com $-2 < x_0 < 2$, onde γ é a fronteira do quadrado com vértices $z_0 = 2+2i$, $z_1 = -2+2i$, $z_2 = -2-2i$ e $z_3 = 2-2i$.

Exercício 7.2. Suponha que f é analítica sobre o traço de um contorno fechado simples γ e no seu interior e seja z_0 um ponto não pertencente a $\{\gamma\}$. Prove que

$$n! \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \int_\gamma \frac{f^{(n)}(z)}{(z-z_0)} dz.$$

Exercício 7.3. Expanda cada uma das funções seguintes em série de Taylor em torno dos pontos indicados e determine a região de validade de cada uma dessas expansões:

a) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}; \quad z_0 = 0$

b) $f(z) = \operatorname{sen} z; \quad z_0 = \pi/4$

c) $f(z) = e^{-z}; \quad z_0 = 0.$

d) $f(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2; \quad z_0 = 2$

e) $f(z) = \cos^3 z; \quad z_0 = 0$

Sugestão: Use a identidade trigonométrica $4\cos^3 z = \cos 3z + 3\cos z$.

f) $f(z) = \frac{1-z}{z-2}; \quad z_0 = 1$

g) $f(z) = \frac{1-z}{z-3}; \quad z_0 = 1$

Exercício 7.4. Verifique que:

a) $\sec z = 1 + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{5}{24} z^4 + \dots, \qquad |z| < \pi/2.$

b) $\tan z = z + \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{2}{15} z^5 + \dots, \qquad |z| < \pi/2.$

Exercício 7.5. Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n$. Esta função é derivável no ponto $z = 0$? Justifique. Indique, então, qual o valor de $f^{(3)}(0)$.

Exercício 7.6. Mostre que a função $f(z) = z \operatorname{sen} z^2$ tem um zero de ordem 3 em $z = 0$.

Exercício 7.7. Localize os zeros das seguintes funções e diga qual a respectiva ordem:

a) $f(z) = (1 + z^2)^3$

b) $f(z) = e^z + 1$

c) $f(z) = z^4 e^{z-5}$

d) $f(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{z}$.

Exercício 7.8. Mostre que o máximo valor de $|z^2 + 3z - 1|$ para z no disco $|z| \leq 1$ é $\sqrt{13}$.

Exercício 7.9. Seja f uma função inteira (isto é, relembre, uma função analítica em todo o plano complexo). Mostre que, se $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ para todo o $z \in \mathbb{C}$, então f é constante em $\mathbb{C}$.

Sugestão: Considere a função $g(z) = \exp(f(z))$.

Exercício 7.10. Seja f uma função analítica num domínio limitado D e contínua em $\overline{D} = D \cup \operatorname{fr}(D)$. Suponha, além disso, que f não se anula em D. Mostre que, nesse caso

$$\min\{|f(z)| : z \in \overline{D}\} = \min\{|f(z)| : z \in \operatorname{fr}(D)\}.$$

8. Séries de Laurent

A mathematician who is not also something of a poet
will never be a complete mathematician.

Karl Weierstrass

A série de Taylor permite-nos expandir uma função f em série de potências em torno do ponto $z = z_0$ quando f é analítica em z_0. Assim, este tipo de expansão não se aplica a funções como $f(z) = 1/z$ ou $g(z) = e^z/z^2$, à volta de $z = 0$, uma vez que tais funções não são analíticas em $z = 0$. Para tais funções, existe outra expansão, chamada expansão em *série de Laurent*, a qual usa potências negativas de z.

8.1 Séries de Laurent

A forma geral de uma série envolvendo potências negativas de $(z - z_0)$ é

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{8.1}$$

onde a notação anterior deve ser interpretada como uma notação compacta para

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}. \tag{8.2}$$

Assim, a série (8.1) converge absolutamente se e só se ambas as séries em (8.2) convergirem absolutamente.

Definição 8.1. *Se* $0 \le R_1 < R_2$ *e* $z_0 \in \mathbb{C}$, *define-se* **anel de centro em** z_0 **e raios** R_1, R_2 *(e denota-se por* $An(z_0; R_1, R_2)$*) como o conjunto*

$$An(z_0; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Define-se **anel fechado de centro em** z_0 **e raios** R_1 **e** R_2 *e denota-se por* $\overline{An}(z_0; R_1, R_2)$ *por*

$$\overline{An}(z_0; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} : R_1 \le |z - z_0| \le R_2\}. \tag{8.3}$$

Nota: Na definição anterior, admite-se $R_2 = \infty$; nesse caso, entende-se que

$$An(z_0; R_1, \infty) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R_1\}.$$

Teorema 8.1 (Teorema de Laurent)**.** *Seja* f *uma função analítica no anel* $An(z_0; R_1, R_2)$*, onde* $0 \le R_1 < R_2$*. Então, em* $An(z_0; r_1, R_2)$*,* f *admite a seguinte expansão em série*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \tag{8.4}$$

onde a convergência é absoluta em $An(z_0; R_1, R_2)$*. Além disso, se* $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ *onde* $R_1 < r < R_2$*,* $0 \le t \le 2\pi$*, então*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi. \tag{8.5}$$

Dem: Escolhamos r_1 e r_2 tais que $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$ e sejam $\gamma_{r_1}(t) = z_0 + r_1 e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ e $\gamma_{r_2}(t) = z_0 + r_2 e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$; veja Fig. 8.1

Vamos começar por mostrar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{8.6}$$

Para estabelecer (8.6), escolhamos ϵ suficientemente pequeno para que $B(z;\epsilon) \subset An(z_0; r_1, r_2)$ e seja $C_\epsilon = z + \epsilon e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Então, de acordo com o Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos, temos

$$\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0. \tag{8.7}$$

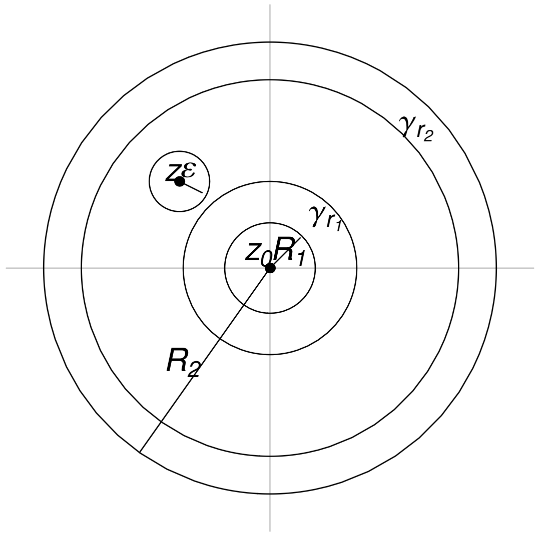


Figura 8.1: Figura do Teorema de Laurent

De acordo com a fórmula integral de Cauchy, o valor do terceiro integral em (8.7) é $2\pi i f(z)$, pelo que a equação (8.6) se obtém de imediato.

Resta-nos agora expandir os dois integrais em (8.6) em séries de potências e calcular os respectivos coeficientes.

Escolhamos primeiramente ρ_1 e ρ_2 tais que

$$r_1 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < r_2,$$

o que implica:

(i)

$$|\xi - z| = |\xi - z_0 - (z - z_0)| \geq r_2 - \rho_2 \quad \text{para } \xi \text{ em} \gamma_{r_2}.$$

(ii)

$$|\xi - z| = |\xi - z_0 - (z - z_0)| \geq \rho_1 - r_1 \quad \text{para } \xi \text{ em} \gamma_{r_1}.$$

Tal como na demonstração do Teorema de Taylor, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

para $|z - z_0| < \rho_2$, onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

O tratamento do segundo integral é idêntico:

Temos

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{(z - z_0)} + \frac{(\xi - z_0)}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{(\xi - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}} - \frac{(\xi - z_0)^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}(\xi - z)},$$

donde

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} f(\xi)\{\frac{1}{(z - z_0)} + \ldots + \frac{(\xi - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}} - \frac{(\xi - z_0)^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}(\xi - z)}\} d\xi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} - B_m, \end{aligned}$$

onde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} d\xi$$

e

$$B_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}(\xi - z)} d\xi.$$

Como $\{\gamma_{r_1}\}$ é compacto (veja Teorema 2.7), temos que $\exists M > 0 : |f(\xi)| \leq M$, para $\xi \in \{\gamma_{r_1}\}$. Além disso, por (ii) acima, $|\xi - z| \geq \rho_1 - r_1$. Também, $|z - z_0| > \rho_1$ e $|\xi - z_0| = r_1$. Então,

$$\begin{aligned} |B_m| &\leq \frac{1}{2\pi} . \frac{M r_1^{m+1}}{\rho_1^{m+1}(\rho_1 - r_1)} 2\pi r_1 \\ &= \frac{M r_1}{(\rho_1 - r_1)} (\frac{r_1}{\rho_1})^{m+1}, \end{aligned}$$

ou seja, $|B_m| \to 0$ quando $m \to 0$, uma vez que $r_1/\rho_1 < 1$.

Segue-se que

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}.$$

Para finalizar a demonstração temos de substituir γ_{r_1} e γ_{r_2} (nas expressões para a_n e b_n) por γ_r. Isto pode fazer-se, de novo usando o Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos. $\boxdot$

Nota: Se considerarmos $c_n = a_n, n \geq 0$ e $c_{-n} = b_n,\ n \geq 1$, e usarmos a notação mais compacta (8.4), tem-se

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{8.8}$$

onde a série converge absolutamente no anel $An(z_0; R_1, R_2)$, sendo os coeficientes c_n dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\ ,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{8.9}$$

A série (8.4) é chamada **série de Laurent** para f em torno de z_0. Em (8.4), a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ é dita **parte em série de potências** de f e a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^{-n}$ é referida como **parte singular** ou **parte principal** de f .

Nota: Convém salientar que não podemos agora afirmar que os coeficientes a_n satisfazem $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, uma vez que f não é necessariamente derivável em $|z - z_0| < R_1$.

Teorema 8.2. *A expansão em série de Laurent no anel $An(z_0; R_1, R_2)$ é única.*

Dem: Suponhamos que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(z - z_0)^n.$$

Então

$$(z - z_0)^{-m-1}f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(z - z_0)^{-n-m-1} = f_1(z) + \frac{d_m}{z - z_0} + f_2(z),$$

onde

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{m-1} d_n(z - z_0)^{n-m-1}$$

e

$$f_2(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} d_n(z - z_0)^{n-m-1}.$$

Mas, cada uma das funções f_1 e f_2 tem uma primitiva em $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Com efeito, sejam

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{m-1} \frac{1}{(n - m)} d_n(z - z_0)^{n-m}$$

e

$$F_2(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-m)} d_n (z-z_0)^{n-m}.$$

Então, é fácil de verificar que as séries convergem absolutamente para $R_1 < |z - z_0| < R_2$ e que $F_1'(z) = f_1(z)$ e $F_2'(z) = f_2(z)$. Então

$$\int_{\gamma_r} f(z)(z-z_0)^{-m-1} dz = \int_{\gamma_r} \frac{d_m}{(z-z_0)} dz = 2\pi i d_m$$

ou seja, temos

$$d_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz,$$

como desejávamos provar. $\boxdot$

Nota:

- O resultado sobre a unicidade da série de Laurent é importante porque, na maioria das vezes, essa expansão não é obtida directamente usando a expressão (8.9) para o cálculo dos seus coeficientes, mas recorrendo a outros métodos.

- Se a função f é analítica em $B(z_0; R)$, então a sua expansão em série de Laurent no anel $An(z_0; 0, R)$ não é mais do que a sua série de Taylor; de facto, nesse caso, tem-se para os coeficientes a_n da parte em série de potências

  $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

  e, aplicando o Teorema de Cauchy-Goursat, tem-se para os coeficientes b_n da parte principal:

  $$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1} \, d\xi = 0.$$

8.2 Singularidades isoladas

Definição 8.2. *Diz-se que uma função complexa f tem uma* **singularidade isolada** *em $z = z_0$, se f não é analítica em z_0, mas existe $R > 0$ tal que f é analítica na bola perfurada $B^*(z_0; R)$.*

Se z_0 é uma singularidade isolada de f, então, como $B^*(z_0;R) = An(z_0;0,R)$, podemos expandir f em série de Laurent em $An(z_0;0,R)$, isto é, tem-se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}, \quad \text{para} \quad z \in An(z_0;0,R). \tag{8.10}$$

Esta série pode comportar-se de três formas distintas:

(1) Todos os coeficientes b_n são nulos.

Nesse caso, a série de Laurent (8.10) é uma simples série de potências, isto é, tem-se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \text{para} \quad z \in B^*(z_0;R). \tag{8.11}$$

A série do lado direito da equação anterior define uma função analítica na bola $B(z_0;R)$; se usarmos esta série para definir $f(z_0) := a_0$, então a função f será analítica em todo a bola $B(z_0;R)$, "removendo-se" assim a singularidade. Dizemos, neste caso, que z_0 é uma **singularidade removível**. Por exemplo, consideremos a função $f(z) = \operatorname{sen} z/z$. Esta função não está definida em $z = 0$, tendo singularidade isolada nesse ponto. A série de Laurent de f é

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\ = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots, \qquad (\text{para} \quad |z| > 0). \end{aligned}$$

Então, definindo $f(0) := 1$, obtemos uma função analítica para todo o $z \in \mathbb{C}$.

(2) Existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $b_m \neq 0$, mas $b_n = 0$ para $n > m$ ou seja,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m},$$

com $b_m \neq 0$. Neste caso dizemos que f **tem um pólo de ordem m em z_0**. Por exemplo, se $f(z) = \operatorname{sen} z/z^4$, tem-se

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots, \quad (\text{para} \quad |z| > 0),$$

pelo que f tem um pólo de ordem 3 em $z = 0$.

Pólos de ordem $1, 2, 3, \dots$ são normalmente chamados pólos simples, duplos, triplos,. . ..

(3) Uma infinidade de coeficientes b_n são não nulos.

Nesse caso dizemos que f tem uma **singularidade essencial** em z_0. Por exemplo, se $f(z) = z\,\mathrm{sen}(1/z)$, tem-se

$$\begin{aligned} f(z) = z\,\mathrm{sen}(1/z) = z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \cdots\right) \\ = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^2} - \frac{1}{7!z^6} + \cdots, \quad (\text{para } \ |z| > 0), \end{aligned}$$

pelo que f tem uma singularidade essencial em $z = 0$.

Lema 8.1. *Seja f uma função com uma singularidade isolada em z_0. Então, as seguintes condições s ao equivalentes:*

(i) z_0 é uma singularidade removível.

(ii) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *existe e é finito.*

(iii) $\exists M > 0 \exists \delta > 0 \forall z \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < M.$

Dem: É trivial verificar que (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) e que (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Vejamos agora que (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*). Suponhamos então que a condição (iii) se verifica; como z_0 é uma singularidade isolada, existe $R > 0$ tal que f admite uma expansão em série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n},$$

válida em $An(z_0; 0, R)$, sendo os coeficientes b_n dados por

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz$$

com $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ e $0 < r < R$. Então,

$$|b_n| \le \frac{1}{2\pi} M r^{n-1} 2\pi r = M r^n$$

(desde que, claro está, se tome $r < \delta$). Deixando $r \to 0$, concluímos que $b_n = 0$, para todo o $n \ge 1$. Logo z_0 é uma singularidade removível, como desejávamos mostrar. $\boxdot$

Como consequência imediata do lema anterior, temos o seguinte corolário:

Corolário 8.1. *Se, na expansão em série de Laurent em torno de uma singularidade isolada z_0, qualquer dos coeficientes b_n $(n \geq 1)$ é não nulo, então f é ilimitada em qualquer disco centrado em z_0.*

Existe um critério semelhante ao estabelecido mo Lema 8.1, para pólos, embora um pouco mais complicado.

Teorema 8.3. *Seja f uma função com uma singularidade isolada em $z = z_0$. Então z_0 é um pólo de ordem m se e só se*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = l \neq 0.$$

Dem: Se $f(z)$ tem um pólo de ordem m em $z = z_0$, então

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + \ldots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m},$$

donde,

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m \neq 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = l \neq 0.$$

Então, de acordo com o Lema 8.1, a função $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ tem uma singularidade removível em $z = z_0$. Então, temos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{8.12}$$

para $0 < |z - z_0| < R$ e $a_0 = l \neq 0$. Segue-se imediatamente de (**??**) que

$$f(z) = \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n$$

onde $a_0 \neq 0$, ou seja, que f tem um pólo de ordem m em z_0. $\boxdot$

Nota: O resultado do teorema anterior enuncia-se, por vezes, do seguinte modo. *Uma função complexa f tem um pólo de ordem m em $z = z_0$ se e só se, numa certa bola perfurada $B(z_0; R)$ se tiver*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

onde g é analítica em z_0 e $g(z_0) \neq 0$.

Corolário 8.2. *Se f tem um zero de ordem m em z_0, então $1/f$ tem um pólo de ordem m em z_0; reciprocamente, se f tem um pólo de ordem m em z_0, então $1/f$ tem uma singularidade removível em z_0, e se definirmos $1/f(z_0) = 0$, então $1/f$ tem um zero de ordem m em z_0.*

Dem: Se f tem um pólo de ordem m em z_0, então $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ tem uma singularidade removível em z_0. Removendo essa singularidade (ou seja, definindo $g(z_0) := b_m$) a função assim obtida é analítica em $B(z_0; R)$. Além disso, como $\lim_{z \to z_0} g(z) = b_m \neq 0$, segue-se que $\exists \delta > 0 : g(z) \neq 0$ para $|z - z_0| < \delta$. Então, temos

$$1/f(z) = (z - z_0)^m (1/g(z))$$

onde a função $1/g(z)$ é analítica em $|z - z_0| < \delta$ e $1/g(z_0) \neq 0$. Isto significa que $1/f(z)$ tem um zero de ordem m em z_0. O recíproco é demonstrado de forma análoga. $\boxdot$

Corolário 8.3. *Se f tem um pólo de ordem m em z_0, então*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Dem: Tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} |f(z)| &= \lim_{z \to z_0} \left| \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \right| \\ &= \lim_{z \to z_0} |g(z)| \lim_{z \to z_0} \left| \frac{1}{(z - z_0)^m} \right| \\ &= |l| \lim_{z \to z_0} \left| \frac{1}{(z - z_0)^m} \right| = \infty, \end{aligned}$$

como se pretendia provar. $\boxdot$

No que diz respeito às singularidades essenciais, pode provar-se o resultado muito "curioso" constante do teorema seguinte (cuja demonstração está, no entanto, fora do âmbito deste curso elementar):

Teorema 8.4 (de Picard)**.** *Se f é uma função complexa com uma singularidade essencial em z_0, então em qualquer bola centrada em z_0 f assume todos os valores complexos (excepto, eventualmente, um deles).*

Como consequência deste teorema e do Lema8.1, concluímos que o recíproco do Corolário 8.3 é também verdadeiro, ou seja, se $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, então z_0 é um pólo de f.

Apresentamos um resumo (numa linguagem um pouco informal) com as caracterizações dos três tipos de singularidades isoladas.

Se que f tem uma singularidade isolada em z_0, então:

1. z_0 é uma singularidade removível $\iff$ $|f|$ é limitada numa vizinhança de z_0 $\iff$ f(z) tem limite (finito) quando z tende para z_0 $\iff$ é possível "redefinir" f em z_0 de modo a que f se transforme numa função analítica em z_0;

2. z_0 é um pólo $\iff$ $|f(z)| \to \infty$ quando $z \to z_0$ $\iff$ $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ para um certo inteiro m, onde g é analítica em z_0 e $g(z_0) \neq 0$;

3. z_0 é uma singularidade essencial $\iff$ $f(z)$ não é limitada nem tende para infinito quando z tende para z_0 $\iff$ $f(z)$ assume todo e qualquer valor complexo (excepto, eventualmente, um) em qualquer bola centrada em z_0.

8.3 Resíduos

Definição 8.3. *Seja f uma função com uma singularidade isolada em $z = z_0$ e seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

a sua expansão em série de Laurent numa certa bola perfurada $B^*(z_0; R)$; o coeficiente b_1 (da potência negativa $(z - z_0)^{-1}$) na expansão anterior é chamado o **resíduo de f em z_0**, *e denotado por* Res(f, z_0), *isto é, tem-se*

$$\text{Res}(f, z_0) = b_1.$$

Exemplo 8.1. *Se $f(z) = ze^{2/z}$, então, para $|z| > 0$, a função f admite a seguinte expansão em série de Laurent*

$$\begin{aligned} f(z) = ze^{2/z} &= z\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{2!z^2} + \frac{2^3}{3!z^3} + \cdots\right) \\ &= z + 2 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots \end{aligned}$$

Assim sendo, tem-se

$$\text{Res}(f, 0) = 2.$$

Deduz-se imediatamente do Teorema de Laurent, que

$$\text{Res}(f, z_0) = b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)\; dz, \tag{8.13}$$

onde $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ e $0 < r < R$, ou seja, que

$$\int_{\gamma_r} f(z)\; dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0). \tag{8.14}$$

A fórmula anterior mostra, desde já, a importância dos resíduos no cálculo de integrais.

Exemplo 8.2. *Deduz-se imediatamente do Exemplo 8.1 que, sendo $f(z) = ze^{2/z}$, então*

$$\int_{\gamma_r} ze^{2/z}\; dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 4\pi i,$$

sendo $\gamma_r(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, com qualquer valor positivo de r.[a]

[a]Pelo Teorema da Deformação do contorno, γ_r pode ser substituído por qualquer contorno fechado simples orientado positivamente, com $z = 0$ no seu interior.

Teorema 8.5 (Teorema dos resíduos)**.** *Seja γ um contorno fechado simples (orientado positivamente) e seja f uma função analítica em γ e no seu interior, excepto num número finito de singularidades isoladas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ situadas no interior de γ. Então,*

$$\int_{\gamma} f(z)\; dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}(f, z_j). \tag{8.15}$$

Dem: Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ circunferências de centros nos pontos $z_1, z_2, \ldots, z_n$, orientadas positivamente, interiores a γ e de raios suficientemente pequenos de modo que não se intersectem duas a duas. As circunferências $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ e o contorno γ formam a fronteira de uma região fechada na qual f é analítica e cujo interior é um domínio multiplamente conexo.

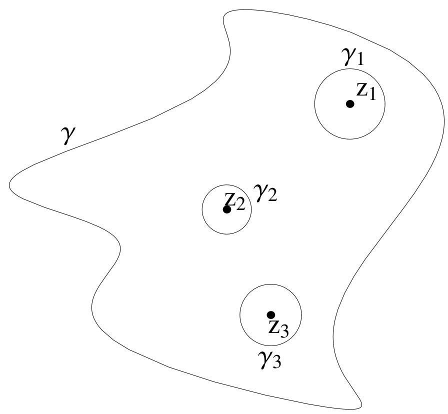


Figura 8.2: Figura do Teorema dos resíduos

Aplicando o Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos, temos que

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz - \ldots \int_{\gamma_n} f(z)dz = 0,$$

ou seja, temos

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Mas,

$$\int_{\gamma_j} f(z)\ dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_j) \quad j = 1, \ldots, n,$$

e o resultado segue-se de imediato. $\boxdot$

Cálculo de resíduos

O Teorema dos resíduos é uma ferramenta importante no cálculo de integrais; no entanto, para que possamos tirar partido do resultado estabelecido nesse teorema, é necessário ter processos práticos para calcular resíduos. Os dois lemas seguintes são de particular utilidade.

Lema 8.2. *(i) Se z_0 é um pólo simples de f, então*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

(ii) Se $f(z) = p(z)/q(z)$, onde ambas as funções p e q são analíticas em z_0, $p(z_0) \neq 0$ e z_0 é um zero simples de q, então

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Dem: (*i*) Temos

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde se segue que

$$(z - z_0) f(z) = b_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1},$$

ou seja, que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = b_1 = \operatorname{Res}(f, z_0).$$

(*ii*) É imediato concluir que, nas condições enunciadas, f tem um pólo simples em z_0. Então,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\left(\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}\right)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Lema 8.3. *Se z_0 é um pólo de ordem m de f, então*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Dem: Temos

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

de modo que

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + \ldots + b_1 (z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m},$$

e portanto,

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!\ b_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{(n+1)!} a_n (z-z_0)^{n+1}.$$

O resultado segue de imediato, considerando o limite quando $z \to z_0$. $\boxdot$

Exemplo 8.3. *Terminamos com um exemplo muito simples de utilização do comando* **Residue** *na determinação de resíduos de funções.*
Seja $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}$ *e calculemos os resíduos de* f *em* $z = \pi$ *e* $z = 0$*:*

```
Residue[Cos[z] / (z^2 * (z - π) ^3), {z, π}]
```

$$\frac{-6 + \pi^2}{2\,\pi^4}$$

```
Residue[Cos[z] / (z^2 * (z - π) ^3), {z, 0}]
```

$$-\frac{3}{\pi^4}$$

8.4 Exercícios

Exercício 8.1. Considere a função $f(z) = -\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

a) Obtenha a sua expansão em série de Taylor em torno do ponto $z = 0$ e indique a região de validade dessa expansão.

b) Obtenha a sua expansão em série de Laurent na região $1 < |z| < 2$.

c) Obtenha a sua expansão em série de Laurent na região $|z| > 2$.

d) Obtenha a sua expansão em série de Laurent na região $0 < |z-1| < 1$.

Exercício 8.2. Determine a expansão em série de Laurent na região $0 < |z| < \pi$ da função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \operatorname{senh} z}$. Diga que tipo de singularidade é $z = 0$.

Exercício 8.3. Mostre que:

$$a) \ \frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \ldots \qquad (0 < |z| < 1).$$

$$b) \ \csc z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z + [\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}]z^3 + \ldots \qquad (0 < |z| < \pi)$$

Exercício 8.4. Em cada caso, escreva a parte principal da função relativa à sua singularidade isolada e determine se essa singularidade é um pólo, uma singularidade essencial ou uma singularidade removível:

a) $f(z) = z\, e^{1/z}$

b) $g(z) = \dfrac{z^2}{1+z}$

c) $h(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$

d) $\phi(z) = \dfrac{\cos z}{z}$

e) $\psi(z) = \dfrac{1}{(2-z)^3}$

Exercício 8.5. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções:

a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+z}$

b) $g(z) = \cot z$

c) $h(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z}$

d) $\phi(z) = \frac{\cos z - \cos(2z)}{z^4}$

Exercício 8.6. A função $f(z) = \frac{1}{(2\cos z - 2 + z^2)^2}$ tem um pólo em $z = 0$. Indique qual a ordem desse pólo.

Exercício 8.7. Calcule os seguintes integrais, usando o Teorema dos resíduos :

a) $\int_\gamma \dfrac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\, dz; \qquad \gamma(t) = 4e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

b) $\int_\gamma \tan z\, dz; \qquad \gamma(t) = 2e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

c) $\int_\gamma \dfrac{dz}{2z \operatorname{senh} z}; \qquad \gamma(t) = 2e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

d) $\int_\gamma \dfrac{1+z}{1-\cos z} dz; \qquad \gamma(t) = 4e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

e) $\int_\gamma \dfrac{1}{e^z - 1} dz; \qquad \gamma(t) = 3e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

Índice

Bibliografia

[BN96] Joseph Bak and Donald J. Newman. *Complex Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1996.

[CB84] Ruel V. Churchill and James Ward Brown. *Complex Variables and its Applications*. McGraw-Hill, Singapore, 4th edition, 1984.

[Con91] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Springer-Verlag, New-York, 2nd edition, 1991.

[Gam00] Theodore W. Gamelin. *Complex Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[GL74] E. A. Grove and G. Ladas. *Introduction to Complex variables*. Houghton Mifflin Company, Boston, 1974.

[Lan93] Serge Lang. *Complex Analysis*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1993.

[MH87] Jerold E. Mardsen and Michael J. Hoffman. *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman and Company, New York, 2nd edition, 1987.

[MH01] John H. Mathews and Russell W. Howell. *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*. Jones and Bartlett Publishers, Lodres, 4th edition, 2001.

[Nah98] Paul J. Nahin. *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.

[Nee97] Tristan Needham. *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press, Oxford, 1997.

[Pal91] Bruce P. Palka. *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag, New york, 1991.

[Pri90] H. A. Priestley. *Introduction to Complex Analysis*. Oxford University Press, Oxford, 1990.

[Sha06] Willian T. Shaw. *Complex Analyis with Mathematica®*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[SS93] E. B. Saff and A. D. Snider. *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering*. Prentice-Hall, Inc., Englewwod Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 1993.

[ST85] Ian Stewart and David Tall. *Complex Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Why64] G. T. Whyburn. *Topological Analysis*. Princeton Unuiversity Press, 1964.