

**Problemas em Teoria das Matrizes:  
novos e velhos, resolvidos e por resolver**

João Filipe Queiró

Universidade de Coimbra

II Jornadas Luso-Galegas de Álgebra e Computação

Braga, 10 Outubro 2008

1. Os valores próprios da soma de duas matrizes hermíticas
2. Os valores singulares do produto de duas matrizes arbitrárias
3. O problema inverso não-negativo dos valores próprios
4. Compressões diagonais de matrizes normais

## 1. Os valores próprios da soma de matrizes hermiticas

Dados dois espectros reais  $\alpha$  e  $\beta$ , quais são os possíveis espectros  $\gamma$  de somas  $A + B$ , onde  $A$  e  $B$  são matrizes hermiticas  $n \times n$  com espectros  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente?

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad \beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$$

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n$$

**Notação:**  $E(\alpha, \beta) = \{\gamma \text{ possíveis}\}$

Trivial:  $E(\alpha, \beta)$  está contido no hiperplano definido pela condição do traço, que abreviamos para  $\Sigma\gamma = \Sigma\alpha + \Sigma\beta$ .

Trivial:  $E(\alpha, \beta)$  é compacto e conexo

(imagem de  $\mathcal{U}_n$  pela função contínua  $U \mapsto \lambda(D_\alpha + UD_\beta U^*)$ )

Menos trivial:  $E(\alpha, \beta)$  é um politopo convexo (Dooley+Repka+Wildberger, 1993)

(propriedades de convexidade da aplicação momento da geometria simpléctica)

Exemplos de relações válidas:

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n$$

$$\gamma_6 \leq \alpha_2 + \beta_5$$

$$\gamma_2 + \gamma_4 \leq \alpha_1 + \alpha_4 + \beta_1 + \beta_3$$

$$\gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_9 \leq \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_7 + \beta_2 + \beta_4 + \beta_5$$

Demonstração de  $\gamma_6 \leq \alpha_2 + \beta_5$

A hermítica  $n \times n$  com vectores próprios ortonormados  $e_1, \dots, e_n$  associados aos valores próprios  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ , respectivamente.

$$E_d = \langle e_1, \dots, e_d \rangle, \quad E'_{n-d+1} = \langle e_d, \dots, e_n \rangle, \quad d = 1, \dots, n$$

$$\alpha_i = \min_{x \in E_i, \|x\|=1} x^* A x = \max_{x \in E'_{n-i+1}, \|x\|=1} x^* A x, \quad i = 1, \dots, n$$

$A$  com vectores próprios  $e_1, \dots, e_n$

$B$  com vectores próprios  $f_1, \dots, f_n$

$C = A + B$  com vectores próprios  $g_1, \dots, g_n$

$$\dim E'_{n-1} \cap F'_{n-4} \cap G_6 \geq 1$$

Para  $x$  nessa intersecção,  $\|x\| = 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} \gamma_6 &\leq x^*(A + B)x \\ &= x^*Ax + x^*Bx \\ &\leq \alpha_2 + \beta_5 \end{aligned}$$

R. Thompson + L. Freede (1971):

$$r \in \{1, \dots, n\}$$

$$1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$$

$$1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$$

$$i_r + j_r - r \leq n$$

Então

$$\gamma_{i_1+j_1-1} + \gamma_{i_2+j_2-2} + \dots + \gamma_{i_r+j_r-r} \leq \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_r} + \beta_{j_1} + \dots + \beta_{j_r}$$

Conjectura (A. Horn, 1962):

$E(\alpha, \beta)$  é descrito completamente por uma família de desigualdades do tipo

$$\gamma_{k_1} + \cdots + \gamma_{k_r} \leq \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r} + \beta_{j_1} + \cdots + \beta_{j_r}$$

onde  $r \in \{1, \dots, n\}$  e  $i_1 < \dots < i_r$ ,  $j_1 < \dots < j_r$ ,  $k_1 < \dots < k_r$ .

Abreviadamente,

$$\sum \gamma_K \leq \sum \alpha_I + \sum \beta_J$$

onde  $I = (i_1, \dots, i_r)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_r)$ ,  $K = (k_1, \dots, k_r)$ .

Uma consequência disto seria que  $E(\alpha, \beta)$  é um politopo convexo.

A questão está em identificar os trios correctos  $(I, J, K)$ . Horn faz uma conjectura complicada sobre isto.

Para  $I = (i_1, \dots, i_r)$ , com  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ , ponhamos

$$\rho(I) = (i_r - r, \dots, i_2 - 2, i_1 - 1)$$

Exemplos:

$$\rho(i) = i - 1$$

$$\rho(2, 3) = (1, 1)$$

$$\rho(3, 5, 11) = (8, 3, 2)$$

Então a conjectura de Horn é:

$$\gamma \in E(\alpha, \beta)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \gamma = \sum \alpha + \sum \beta, \\ \sum \gamma_K \leq \sum \alpha_I + \sum \beta_J \text{ sempre que} \\ \rho(K) \in E[\rho(I), \rho(J)] \text{ (para todos os } r, 1 \leq r < n) \end{array} \right.$$

A conjectura está hoje provada (Klyachko, 1998; Knutson + Tao, 1999).

As desigualdades “essenciais” :

Belkale (2000), Knutson+Tao+Woodward (2001)

(relação com multiplicidades de Littlewood-Richardson)

Para  $n \leq 5$  não há desigualdades redundantes.

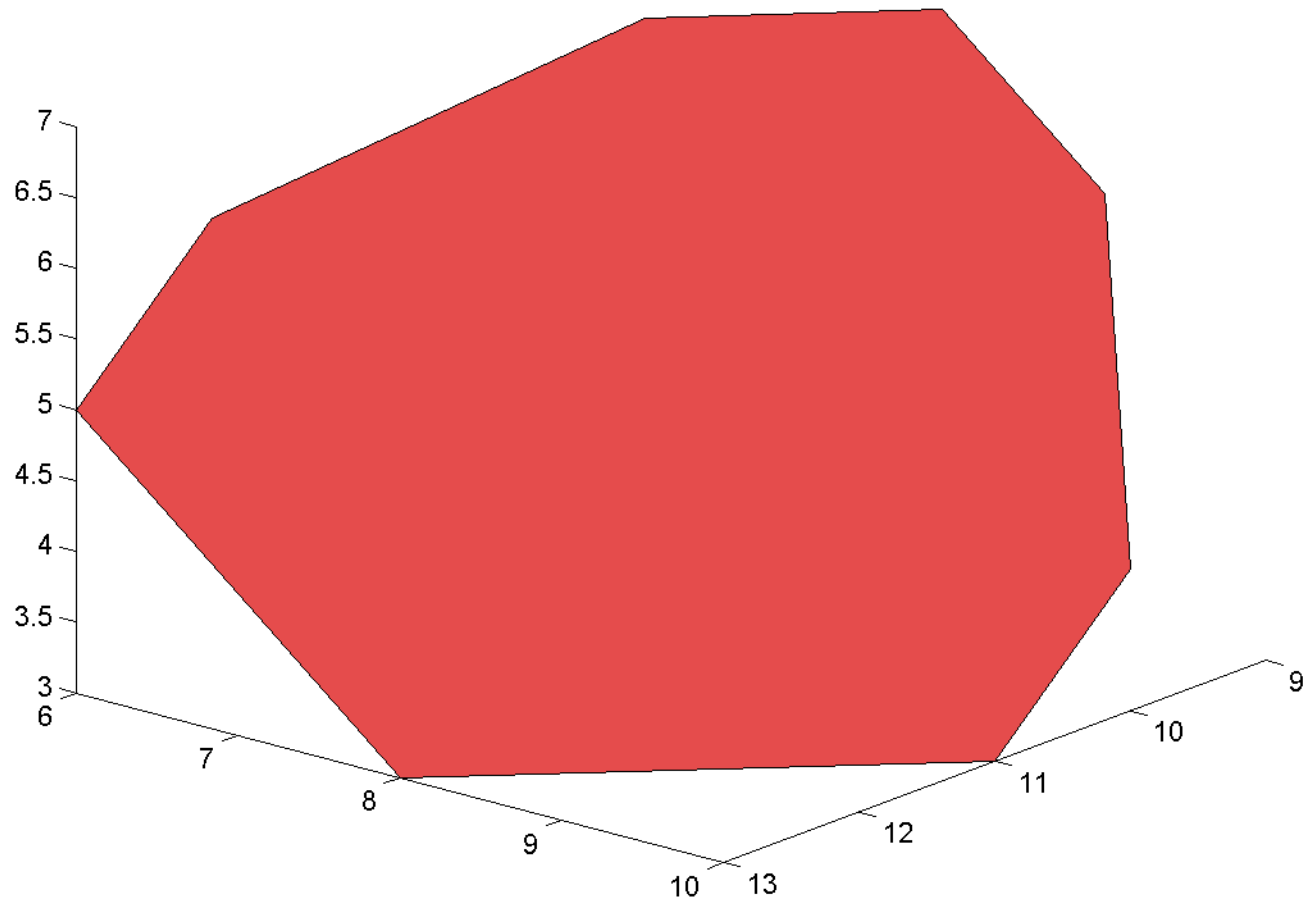
Exemplo:  $\alpha = (6, 4, 2)$ ,  $\beta = (7, 4, 1)$

$$E(\alpha, \beta) = \{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3,$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 24,$$

$$\gamma_1 \leq 13, \gamma_2 \leq 10, \gamma_3 \leq 7,$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \leq 21, \gamma_1 + \gamma_3 \leq 18, \gamma_2 + \gamma_3 \leq 15\}$$



## Como se explica o Teorema de Horn?

$V_1 \subset \cdots \subset V_n \triangleleft \mathbb{C}^n$  com  $\dim(V_i) = i$ .

$$V = (V_1, \dots, V_n)$$

Fixemos  $r \in \{1, \dots, n\}$ .

$1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$  inteiros.  $I = (i_1, \dots, i_r)$

$$\Omega_I(V) = \{L \triangleleft \mathbb{C}^n : \dim(L) = r, \dim(L \cap V_{i_d}) \geq d\}$$

(variedade de Schubert associada a  $V$  e  $I$ )

$A$  hermítica, valores próprios  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , vectores próprios o-n  $e_1, \dots, e_n$

$$E_d = \langle e_1, \dots, e_d \rangle, \quad E'_{n-d+1} = \langle e_d, \dots, e_n \rangle$$

$$E = (E_1, \dots, E_n), \quad E' = (E'_n, \dots, E'_1)$$

$$I' = (n - i_r + 1, \dots, n - i_1 + 1)$$

J. Hersch + B. Zwahlen (1962):

$$\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_r} = \min_{L \in \Omega_I(E)} \operatorname{tr}(A|_L) = \max_{L \in \Omega_{I'}(E')} \operatorname{tr}(A|_L)$$

onde  $\operatorname{tr}(A|_L) = x_1^* A x_1 + \dots + x_r^* A x_r$  é o *traço de Rayleigh* de  $A$  relativamente a  $L$  ( $\dim L = r$ ,  $x_1, \dots, x_r$  base o-n de  $L$ )

## Aplicação à obtenção de desigualdades

$E, E', F, F', G, G'$  sequências de subespaços construídos com os vectores próprios de  $A, B$  e  $A + B$ .

$$I = (i_1, \dots, i_r) , \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$$

$$J = (j_1, \dots, j_r) , \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$$

$$K = (k_1, \dots, k_r) , \quad 1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n$$

Se  $\Omega_K(G) \cap \Omega_{I'}(E') \cap \Omega_{J'}(F') \neq \emptyset$

então  $\Sigma \gamma_K \leq \Sigma \alpha_I + \Sigma \beta_J$

## Os resultados fundamentais

Recorde-se que  $\rho(I) = (i_r - r, \dots, i_2 - 2, i_1 - 1)$

Então

$$\Omega_K(G) \cap \Omega_{I'}(E') \cap \Omega_{J'}(F') \neq \emptyset$$

$$\Updownarrow$$

$$V_{\rho(K)} \text{ ocorre em } V_{\rho(I)} \otimes V_{\rho(J)} \cong \bigoplus_{\lambda} N_{\lambda}^{\rho(I)\rho(J)} V_{\lambda}$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho(K) \in E[\rho(I), \rho(J)]$$

Como Klyachko também provou que todas as desigualdades válidas provêm de intersecções de variedades de Schubert, segue-se o Teorema de Horn.

## Referências principais

R. Bhatia, Linear algebra to quantum cohomology: the story of Alfred Horn's inequalities, *Amer. Math. Monthly* 108 (2001), 289-318.

A. H. Dooley, J. Repka e N. J. Wildberger, Sums of adjoint orbits, *Linear and Multilinear Algebra* 36 (1993), 79-101.

W. Fulton, Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus, *Bulletin of the AMS* 37 (2000), 209-249.

A. Horn, Eigenvalues of sums of Hermitian matrices, *Pacific J. Math.* 12 (1962), 225-241.

A. Klyachko, Stable bundles, representation theory and hermitian operators, *Selecta Mathematica* 4 (1998), 419-445.

A. Knutson e T. Tao, The honeycomb model of  $GL_n(\mathbb{C})$  products I: Proof of the saturation conjecture, *J. Amer. Math. Soc.* 12 (1999), 1055-1090.

A. P. Santana, J. F. Queiró e E. Marques de Sá, Group representations and matrix spectral problems, *Linear and Multilinear Algebra* 46 (1999), 1-23.

## 2. Os valores singulares do produto de matrizes complexas

(S.p.g., só matrizes quadradas e não-singulares)

Valores singulares de  $A =$  valores próprios de  $\sqrt{A^*A}$  (hermítica d.p.)

Dados  $\alpha$  e  $\beta$  ( $> 0$ ), quais são os possíveis “espectros singulares”  $\gamma$  de produtos  $AB$ , onde  $A$  e  $B$  são matrizes complexas com espectros singulares  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente?

**Notação:**  $S(\alpha, \beta)$

Exemplos de relações válidas:

$$\gamma_1 \cdots \gamma_n = \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_n$$

$$\gamma_6 \leq \alpha_2 \beta_5$$

$$\gamma_2 \gamma_4 \leq \alpha_1 \alpha_4 \beta_1 \beta_3$$

$$\gamma_3 \gamma_5 \gamma_9 \leq \alpha_2 \alpha_3 \alpha_7 \beta_2 \beta_4 \beta_5$$

## Relação com o problema anterior?

Os valores singulares de  $AB$  são as raízes quadradas dos valores próprios de  $(AB)^*AB = B^*A^*AB \sim BB^*.A^*A = MN$ , digamos.

$M$  e  $N$  têm valores próprios  $\alpha^2$  e  $\beta^2$ , respectivamente.

$$M = e^H, \quad N = e^K, \quad \text{com } H \text{ e } K \text{ hermíticas.}$$

Estamos interessados nos valores próprios de  $e^H e^K$ .

Mas...  $e^H e^K \neq e^{H+K}$

A. Klyachko, 2000:

$$S(\alpha, \beta) = e^{E(\log \alpha, \log \beta)}$$

(a relação que se obteria se  $e^H e^K = e^{H+K}$ )

(não trivial!)

## Referências principais

A. Klyachko, Random walks on symmetric spaces and inequalities for matrix spectra, *Linear Algebra and its Applications* 319 (2000), 37-59.

R. Thompson e S. Therianos, On the singular values of matrix products - I, *Scripta Math.* 29 (1973), 99-110.

R. Thompson, On the singular values of matrix products - II, *Scripta Math.* 29 (1973), 111-114.

R. Thompson e S. Therianos, On the singular values of matrix products - III, *Scripta Math.* 29 (1973) 115-123.

### 3. O problema inverso não-negativo dos valores próprios

Dada uma lista de números complexos

$$\sigma = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

quando é que ela é o espectro de uma matriz real não-negativa?

S.p.g., consideramos só matrizes irredutíveis, isto é, matrizes que não são da forma  $\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & E \end{bmatrix}$ , nem mesmo após uma semelhança permutacional.

Notação:  $\rho(A)$  é o raio espectral de  $A$ .

Seja  $A$  não-negativa e irredutível, com espectro  $\sigma$ . Trivialmente, a lista  $\sigma$  é fechada para a conjugação. Pelo Teorema de Perron-Frobenius:

- $\varrho(A)$  pertence a  $\sigma$ .
- $\varrho(A)$  é um valor próprio simples de  $A$ .

Outras condições necessárias:

- $s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \geq 0$  para  $k = 1, 2, \dots$
- $s_k^m \leq n^{m-1} s_{km}$  para  $k, m = 1, 2, \dots$  (Johnson, Loewy+London)

São conhecidas muitas condições necessárias,

e muitas condições suficientes.

Para  $n \geq 5$ , não é conhecida nenhuma condição necessária e suficiente.

## Soluções para $n = 2, 3, 4$

Suponhamos que  $\sigma = \bar{\sigma}$  e que são verificadas as condições do Teorema de Perron-Frobenius.

$n = 2$  :

As condições  $s_k \geq 0$  são necessárias e suficientes.

$n = 3$  :

As condições  $s_k \geq 0$  e  $s_k^m \leq n^{m-1} s_{km}$  são necessárias e suficientes.

$n = 4$  :

(um teorema com uma página e meia - Meehan, 1998)

## Um resultado espectacular

Seja  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  uma lista de números complexos. Se

$$s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

então existe um natural  $N \geq n$  e uma matriz  $N \times N$  não-negativa  $A$  tal que o espectro de  $A$  é  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots, 0)$ .

(Boyle + Handelman, 1991. Uso de dinâmica simbólica.)

## Limitação no número de zeros?

Exemplo:  $\sigma_\varepsilon = (\sqrt{2}, i, -i, \varepsilon)$  com  $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ .

Pelo Teorema de Boyle-Handelman,  $\sigma_\varepsilon$  é a parte não nula do espectro de uma matriz não-negativa. Seja  $n(\varepsilon)$  o tamanho mínimo de uma tal matriz não-negativa.

Aplicando a condição de Johnson, Loewy+London com  $k = 1$  e  $m = 2$ , obtemos

$$n(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon^2}.$$

Logo,  $n(\varepsilon) \rightarrow \infty$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Referências principais

M. Boyle e D. Handelman, The spectra of nonnegative matrices via symbolic dynamics, *Annals of Mathematics* 133 (1991), 249-316.

C. Johnson, Row stochastic matrices that are similar to doubly stochastic matrices, *Linear and Multilinear Algebra* 10 (1981), 113-120.

R. Loewy e D. London, A note on the inverse eigenvalue problems for nonnegative matrices, *Linear and Multilinear Algebra* 6 (1978), 83-90.

E. Meehan, *Some results on matrix spectra*, Tese de doutoramento, National University of Ireland, Dublin, 1998.

## 4. Compressões diagonais de matrizes normais

Matrizes complexas

$$A \ n \times n, \quad B \ (n - k) \times (n - k)$$

$B$  é uma compressão de  $A$  se existir uma matriz  $V \ n \times (n - k)$  com colunas ortonormadas tal que  $V^*AV = B$ .

Equivalentemente,  $B$  é uma compressão de  $A$  se  $B$  for uma submatriz principal de  $U^*AU$  para alguma  $U \ n \times n$  unitária.

Questão recente:

Dada  $A$   $n \times n$ , descrever o conjunto

$$\Lambda_{n-k}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_{n-k} \text{ é uma compressão de } A\}$$

(Choi+Kribs+Zyczkowski, 2006. Motivação: correcção de erros em computação quântica.)

Sabe-se ainda muito pouco.

Aqui falaremos de tipos especiais de matrizes, mas admitiremos compressões diagonais quaisquer, não necessariamente escalares.

Se  $A$  for hermítica, então qualquer compressão  $B$  de  $A$  é também hermítica, e podemos supô-la diagonal.

$\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$  os valores próprios de  $A$

$\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_{n-k}$  os valores próprios de  $B$

Nesse caso temos um resultado clássico (entrelaçamento):

**Teorema.**  $B$  é uma compressão de  $A$  se e só se

$$\alpha_j \geq \beta_j \geq \alpha_{j+k} \quad , \quad j = 1, \dots, n - k .$$

E se  $A$  for normal (isto é, unitariamente diagonalizável)?

Então a existência de uma compressão diagonal de  $A$  é equivalente à existência de uma submatriz principal  $B$  normal de  $U^*AU$  para alguma  $U$   $n \times n$  unitária.

Em que condições pode isso acontecer?

No caso  $k=1$ , a resposta é que isso acontece essencialmente só no caso hermitico:

**Teorema.** (Fan+Pall, 1957)  $A$   $n \times n$  normal com valores próprios  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .  $B$   $(n-1) \times (n-1)$  normal com valores próprios  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ . Renumeramos os valores próprios de forma que  $\alpha_j = \beta_{j-1}$ ,  $j = q + 1, \dots, n$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  sejam distintos de  $\beta_1, \dots, \beta_{q-1}$ . Então  $B$  é uma compressão de  $A$  se e só se os  $2q - 1$  pontos

$$\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_{q-1}$$

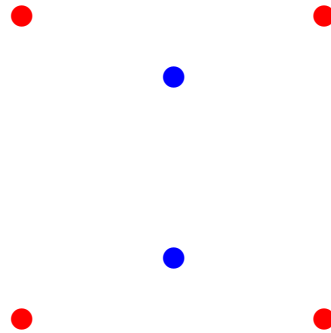
forem colineares e os  $\alpha$ 's e os  $\beta$ 's se entrelaçarem nessa recta.

Portanto, com uma rotação e uma translação, estamos de novo no caso hermítico.

A suficiência é trivial (por causa do teorema sobre matrizes hermíticas).  
O verdadeiro conteúdo do resultado é a necessidade.

Para matrizes hermíticas, basta o caso  $n-1$  para provar a suficiência no caso geral  $n-k$ : inserem-se sequências intermédias de valores próprios.

No caso normal isso não funciona. Exemplo (em Fan+Pall):



Apenas um outro resultado conhecido:

**Teorema.** (Carlson+Sá, 1984)  $A$   $n \times n$  normal com valores próprios (não nulos)  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , satisfazendo  $\gamma + \pi > \arg \alpha_1 \geq \dots \geq \arg \alpha_n \geq \gamma$  para algum  $\gamma \geq 0$ .

$B$   $(n - k) \times (n - k)$  uma submatriz principal normal de  $A$  com valores próprios  $\beta_1, \dots, \beta_{n-k}$ . Então os valores próprios de  $B$  podem ser ordenados de forma que  $\gamma + \pi > \arg \beta_1 \geq \dots \geq \arg \beta_{n-k} \geq \gamma$  e

$$\arg \alpha_j \geq \arg \beta_j \geq \arg \alpha_{j+k}, \quad j = 1, \dots, n - k.$$

Uma ideia: tentar copiar o caso hermítico.

Problema: a ordenação dos números

## A ordem lexicográfica em $\mathbb{C}$

Caracterizada pelo cone positivo  $H = \{a+ib : a > 0 \text{ ou, se } a=0, b > 0\}$

Compatível com a adição:  $H + H \subseteq H$

Compatível com a multiplicação por reais positivos:  $\lambda H \subseteq H$  for  $\lambda > 0$

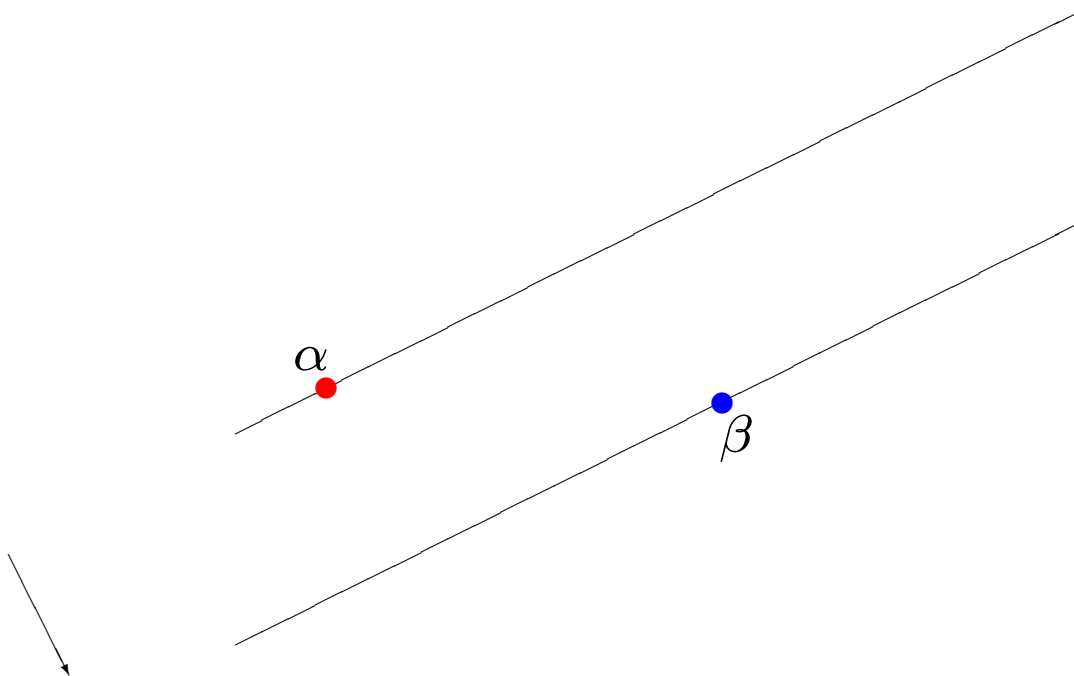
Order total:  $H \cup -H = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Notação:  $\leq$

Para  $\theta$  real,  $\leq_{\theta}$  é a ordem total com cone positivo  $e^{i\theta}H$

$$\alpha \leq_{\theta} \beta \iff e^{-i\theta}\alpha \leq e^{-i\theta}\beta$$

$$\alpha \geq_{\theta} \beta$$



A numeração de elementos em sequências decrescentes

depende da direcção

$\alpha_1$



$\alpha_2$



$\alpha_3$



$$\alpha_1 \geq_{\theta} \alpha_2 \geq_{\theta} \alpha_3$$

$\alpha_3$



$\alpha_1$



$\alpha_2$



$$\alpha_1 \geq_{\theta} \alpha_2 \geq_{\theta} \alpha_3$$

## Min-max para matrizes normais

$\theta \in \mathbb{R}$  arbitrário

$A$   $n \times n$  normal

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  os valores próprios of  $A$ , ordenados de forma que

$$\alpha_1 \geq_{\theta} \dots \geq_{\theta} \alpha_n$$

Sejam  $v_1, \dots, v_n$  vectores próprios o-n de  $A$  correspondentes

Para  $j = 1, \dots, n$ ,

$$E_j = \langle v_1, \dots, v_j \rangle, \quad E'_j = \langle v_j, \dots, v_n \rangle$$

**Teorema.** Para  $j = 1, \dots, n$  tem-se

$$\alpha_j = \min_{x \in E_j, \|x\|=1} x^* Ax = \max_{x \in E'_j, \|x\|=1} x^* Ax .$$

Além disso, tem-se

$$\alpha_j = \max_{\dim E=j} \min_{x \in E, \|x\|=1} x^* Ax = \min_{\dim E=n-j+1} \max_{x \in E, \|x\|=1} x^* Ax .$$

(Aqui max e min são usados no sentido da ordem  $\leq_\theta$  .)

## O resultado principal

**Teorema.** Seja  $\theta$  arbitrário. Seja  $A$  uma matriz normal  $n \times n$  com valores próprios  $\alpha_1 \geq_\theta \dots \geq_\theta \alpha_n$ . Se  $B$  for uma submatriz principal normal  $(n-k) \times (n-k)$  de  $A$  com valores próprios  $\beta_1 \geq_\theta \dots \geq_\theta \beta_{n-k}$ , tem-se

$$\alpha_j \geq_\theta \beta_j \geq_\theta \alpha_{j+k} \quad , \quad j = 1, \dots, n-k.$$

**Demonstração.** = ao caso hermítico, usando min-max.

**Corolário 1.** O Teorema de Fan+Pall.

**Corolário 2.** O Teorema de Carlson+Sá.

(Em ambos os casos, demonstrações quase instantâneas.)

## Duas questões em aberto:

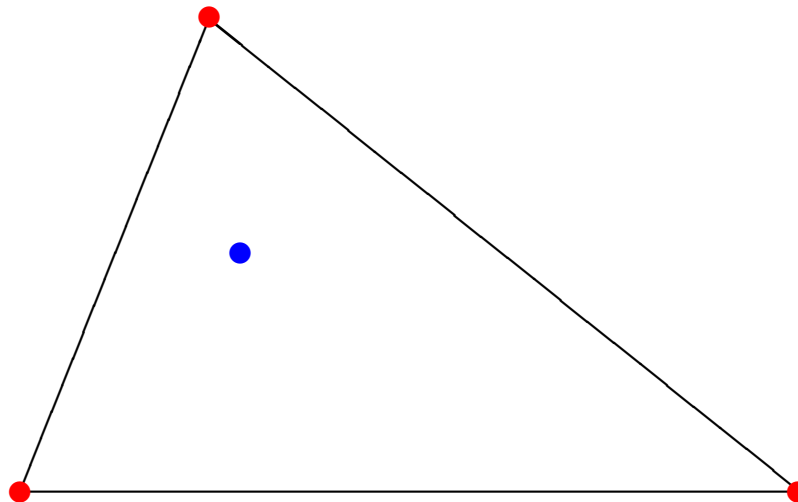
Que restrições é que o teorema impõe às configurações dos valores próprios? (Recorde-se o caso  $k = 1$ .)

Que condições adicionais será preciso acrescentar para obter a resposta completa ao problema da compressão no caso geral ( $n$  e  $k$  quaisquer)?

Fazemos algumas observações sobre a primeira pergunta no caso  $k = 2$ .

Que restrições impõe o teorema?

$$n = 3 : \alpha_1 \geq_{\theta} \beta_1 \geq_{\theta} \alpha_3$$



e esta é a resposta completa para o problema da compressão.

Para  $n > 3$ , põe-se a questão da independência convexa.

**Teorema.** Se os  $\alpha$ 's (a vermelho) forem independentes, então em qualquer triângulo vermelho há um  $\beta$ .

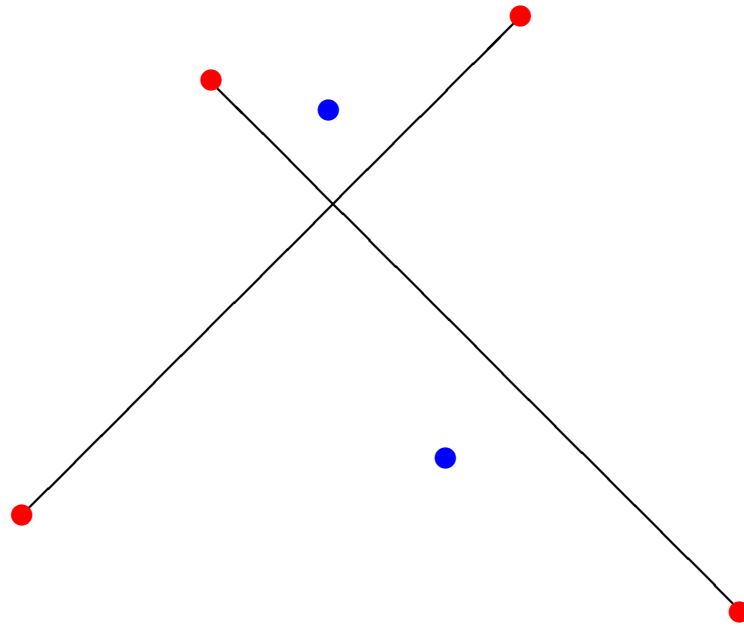
(Isto falha no caso não independente.)

$$n = 4$$

$$\alpha_1 \geq_{\theta} \beta_1 \geq_{\theta} \alpha_3$$

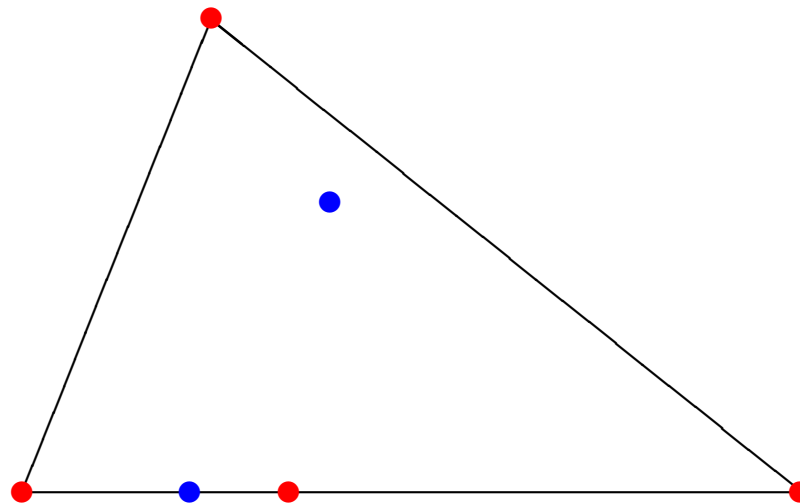
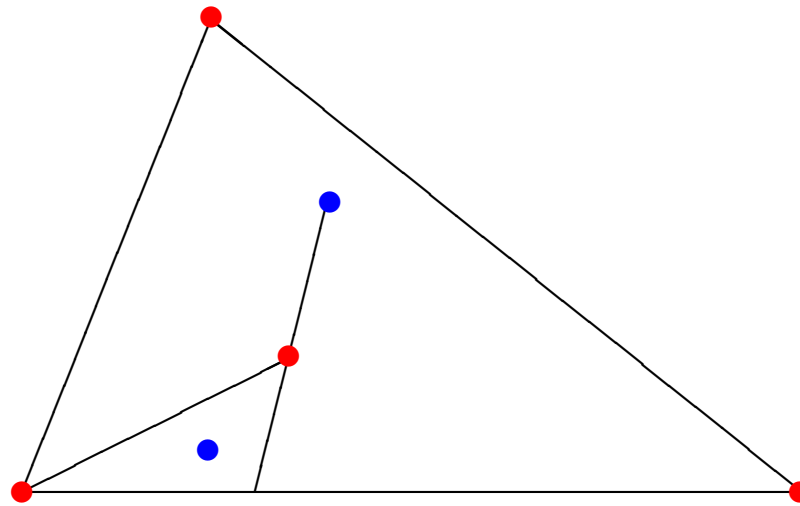
$$\alpha_2 \geq_{\theta} \beta_2 \geq_{\theta} \alpha_4$$

$n = 4$ , caso independente

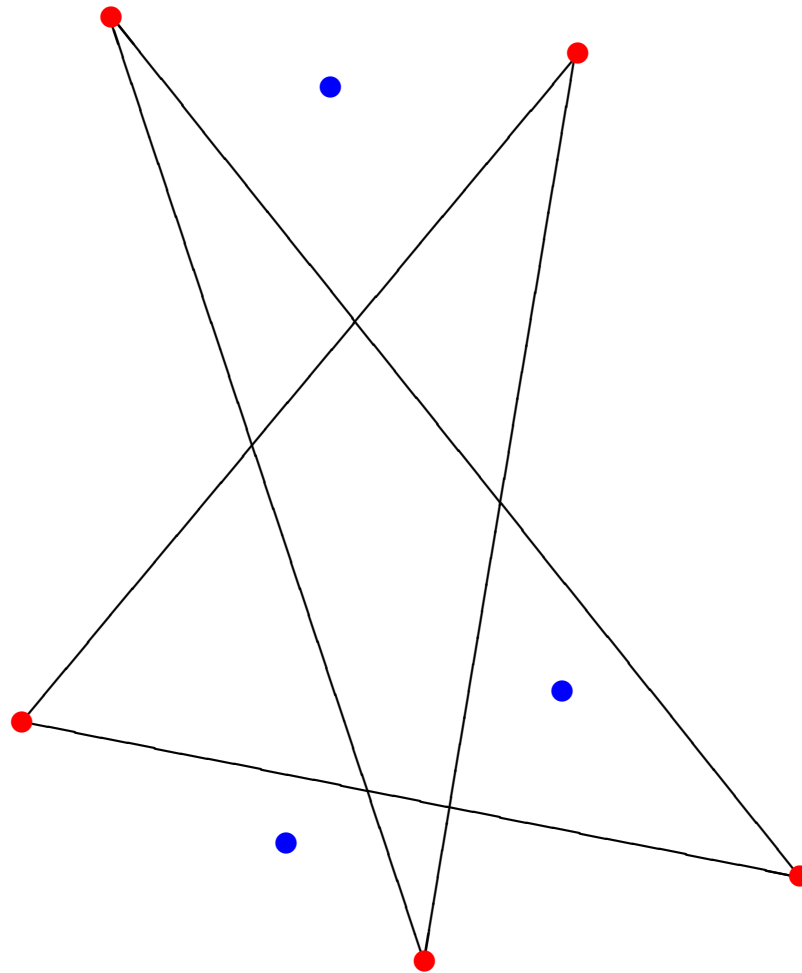


(recorde-se o exemplo de Fan+Pall)

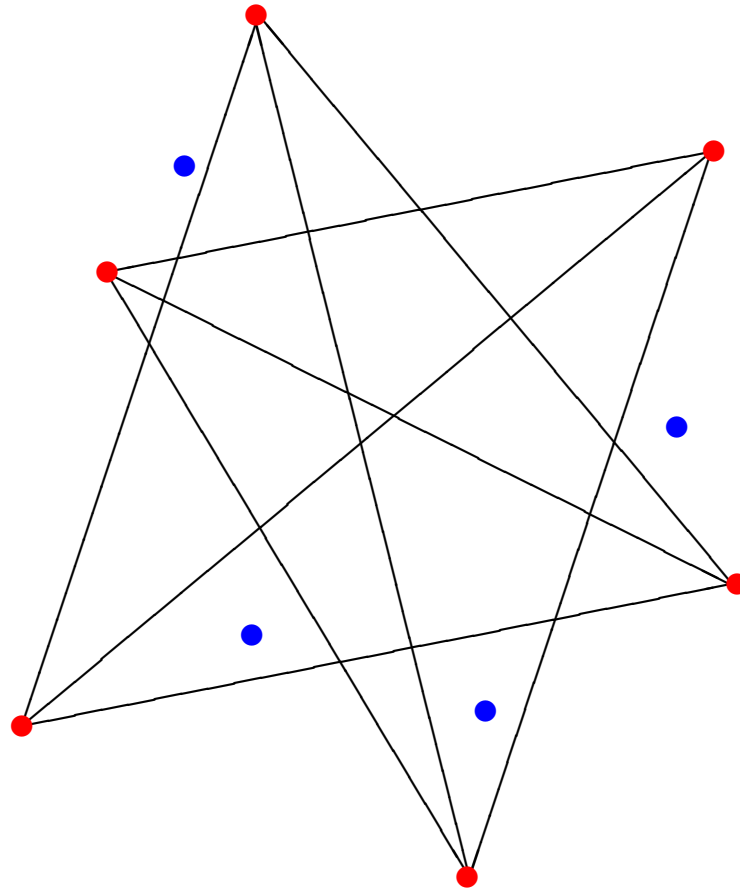
$n = 4$ , caso não independente



$n = 5$ , caso indipendente



$n = 6$ , caso indipendente



## Referências principais

- D. Carlson e E. Marques de Sá, Generalized minimax and interlacing theorems, *Linear and Multilinear Algebra* 15 (1984), 77-103.
- M. Choi, D. Kribs e K. Zyczkowski, Higher-rank numerical ranges and compression problems, *Linear Algebra and its Applications* 418 (2006), 828-839.
- Ky Fan e G. Pall, Imbedding conditions for Hermitian and normal matrices, *Canad. J. Math* 9 (1957), 298-304.
- J. F. Queiró e A. L. Duarte, Imbedding conditions for normal matrices, *Linear Algebra and its Applications*, a publicar.