Maio de 2008

TRABALHO DE PROJECTO

O INFINITO

Popularização da Matemática | Núcleo de estágio da EB 2,3 de Vila Verde

“O infinito? Diz-lhe que entre.

Faz bem ao infinito estar entre gente.”

Alexandre O’neill

Índice

Introdução

Na matemática, infinito é o nome dado a qualquer coisa que seja maior do que a nossa mente pode imaginar. Por esta razão, o conceito de infinito foi alvo de uma discussão ardente. Demócrito, Zenão, Aristóteles, Arquimedes, Galileu, Bolzano, Dedekind, Cantor, Weierstrass, Poincaré, Hilbert, Borel, Russel, Robinson… são apenas alguns dos matemáticos que se dedicaram a este assunto.

Ao longo do tempo, sempre houve matemáticos que se negaram a considerar o infinito como um conceito completo e definido. Em vez disso, preferem considerá-lo como uma progressão interminável de objectos bem definidos, que somos capazes de imaginar, tal como a sucessão dos números naturais, 1, 2, 3, etc.

A história do infinito como entidade matemática é controversa e longa. Desde sempre que o infinito está associado a diversos paradoxos. Aos poucos, alguns dos paradoxos foram sendo eliminados, mas ainda assim, não se trata de um assunto sem controvérsia. Muito pelo contrário, é complexo, subjectivo e conflituoso.

Actualmente o conceito de infinito engloba vários conceitos afins que solicitam processos cognitivos muito diversificados. Assim, falamos, por exemplo, de infinito potencial e de infinito actual, de infinitamente grandes e infinitésimos, de números transfinitos, de infinito geométrico e de infinito algébrico.

O conceito de infinito está presente no currículo de Matemática e sofre uma progressiva evolução com o avançar da escolaridade.

O processo de aprendizagem do conceito matemático de infinito é reconhecidamente um tópico difícil. De facto, a noção de infinito em acto, e em particular, a visão cantoriana, parece contraditória com a intuição e as experiências do quotidiano. Consequentemente as concepções intuitivas revelam-se muito resistentes às tentativas de alteração. Por vezes, a própria prática escolar acaba por reforçar concepções incoerentes e fragmentárias.

O presente trabalho procurou fazer, através dum questionário com itens sobre o assunto, um levantamento das concepções acerca do infinito, entre alunos de uma turma do 8.º ano de escolaridade da Escola Básica 2 e 3 de Vila Verde.

Para além desta breve introdução, duas partes integram este trabalho: a primeira de revisão de literatura e a segunda dedicada ao trabalho de campo. A primeira é constituída pelos sete primeiros capítulos e a segunda pelo último.

No primeiro capítulo intitulado *O Infinito potencial e o Infinito actual* é explicado cada um dos conceitos.

No segundo capítulo denominado *Perspectiva histórica do conceito de Infinito*, aborda-se a noção de infinito ao longo da história da Matemática, percorrendo a Grécia Antiga, Idade Média e seguidamente os séculos XVII, XVIII, XIX e XX.

O terceiro capítulo, *Os primeiros paradoxos do Infinito*, descreve os quatro principais paradoxos de Zenão de Eléia, Dicotomia, Aquiles, Seta e o Estádio, e dois paradoxos de Galileu.

No capítulo quatro, denominado *O paraíso que Cantor criou*, abordam-se os contributos de Cantor para a aceitação do infinito actual.

O capítulo cinco é dedicado ao estudo dos Infinitésimos e faz uma breve introdução à Análise Não-Standard.

Os capítulos seis e sete, designados *A Biblioteca de Babel* e *Escher e o Infinito*, respectivamente, são dedicados à revisão da relação entre a Matemática e a Arte, nomeadamente, no primeiro deles a relação do Infinito com a Literatura e no segundo com as artes plásticas. Para tal analisa-se no capítulo seis a obra literária *Ficções*, de Jorge Luís Borges, nomeadamente o conto *A Biblioteca de Babel.* Já no capítulo sete faz-se uma análise da obra de Escher.

Relativamente ao capítulo oito, *Estudo sobre as concepções de Infinito*, apresentam-se os resultados obtidos pelo questionário aplicado aos alunos.

1. O Infinito potencial e o Infinito actual

Segue-se um excerto da autobiografia de César Zavattini, (*Parliamo tanto di me*, capítulo XVI), onde se retrata o infinito potencial:

Meu pai e eu chegamos à Academia quando o presidente Maust iniciava a chamada dos participantes na prova mundial de matemática (…). "Um, dois, três,…".

Na sala ouvia-se apenas a voz dos concorrentes. Por volta das dezassete, tinham ultrapassado o vigésimo milhar (…). Às vinte, os sobreviventes eram sete "…, 36747, 36748, 36749, 36750, …". Às vinte e uma, Pombo acendeu os candeeiros "…40719, 40720, 40721,…".

Às vinte e duas exactas, registou-se o primeiro golpe de teatro: o algebrista Pull concluiu: "Um bilião". Um oh de assombro coroou a saída inesperada; ficaram com o alento suspenso. Um italiano Binacchi, acudiu com prontidão: "Um bilião de biliões de biliões".

Explodiram aplausos na sala, imediatamente secundados pelo presidente. Meu pai olhou em volta com superioridade (…) e principiou: "Um bilião de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões…". A multidão delirava: "Viva, viva…". "… de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões…". O presidente Maust, muito pálido, murmurava a meu pai, puxando-o pelas abas do Gabão: "Basta, vai fazer-lhe mal". Mas meu pai prosseguia febrilmente: "…de biliões de biliões de biliões de biliões!" A sua voz atenuou-se a pouco e pouco e o último sopro de biliões brotou-lhe dos lábios como um suspiro, após o qual se deixou cair na cadeira, exausto. O príncipe Otão aproximou-se, e preparava-se para lhe colocar a medalha no peito, quando Gianni Binacchi bradou: "Mais um!".

A multidão precipitou-se no hemiciclo e ergueu este último em triunfo. Quando regressámos a casa, minha mãe aguardava-nos, ansiosa, à entrada. Chovia. Meu pai, mal desceu a carruagem, lançou-se-lhe nos braços, soluçando: "Se tivesse dito mais dois, ganhava eu". (Citado em Radice, 1981)

Esta competição, como a descreve o escritor italiano, é ganha por quem pronunciar *"o número mais elevado"*. Mesmo que o pai do excerto, tivesse dito *"mais dois"*, não ganharia a prova mundial de matemática. Na verdade, ninguém a venceria jamais e ninguém poderá jamais vencê-la. Não existe *"um número mais elevado"*, porque não há um número maior que todos os outros. Um número mesmo que vertiginosamente grande, nunca será maior que os outros, porque será sempre possível proferir um número maior ainda, será sempre possível exclamar *"mais um"*.

A sucessão dos números naturais não tem fim, é infinita, fixando um número natural é sempre possível fixar outro número natural maior que esse. E é esta a definição de infinito potencial, é a possibilidade de ir sempre mais longe, não há um elemento que seja o último.

Consideremos então, a sucessão potencial infinita de números naturais e a sucessão de pontos de uma recta. Em ambos os casos, a sucessão é composta por número indeterminável de elementos.

No caso da sucessão dos números naturais, pode prosseguir-se sempre, sem fim, pois pode acrescentar-se sempre mais um número. É claro qual deve ser o próximo elemento, e também que entre dois elementos existe um intervalo, o vazio, por isso, dizemos que se trata de uma sucessão infinita discreta.

Já no caso da sucessão de pontos da recta, trata-se obviamente de uma sucessão infinita contínua. Não faz sentido falar do ponto imediatamente a seguir a outro. Entre um ponto e o que o segue há uma infinidade de pontos que formam também um segmento contínuo, infinitamente divisível em partes contínuas que, por sua vez, também são infinitamente divisíveis e assim sucessivamente num processo que não tem fim. Para além da possibilidade de seguir em frente até ao infinito, ou seja, um infinito potencial, temos também um infinito em acto. Pois ao passar de um ponto P para um ponto Q, seguinte a ele, parece que se passa através de pontos infinitos, que cada vez se esgota uma infinidade de elementos. Ou seja, temos uma infinidade realizável e não apenas não completável, um infinito actual.

2. Perspectiva histórica do conceito de Infinito

"É definir o infinito através daquilo que ele não é? Se a sucessão dos números naturais é inesgotável, onde os posicionamos? Podemos demonstrar que a divisão em dois de um segmento de recta não tem fim?
E o céu, onde acaba?
O matemático trabalha com o infinito mas o que nos ensina sobre ele? Eu acabei por compreender: na verdade, não nos ensina nada. Com uma espantosa humildade o matemático de hoje renuncia a interrogar-se sobre o estatuto do infinito para continuar a matematizá-lo. É aqui que reside a limitação, mas também a força do discurso matemático."

(Levi, 1987)

Para alguns autores a história do infinito é quase a história da matemática.

O conceito do infinito, que tem motivado filósofos, teólogos, poetas e matemáticos, foi alvo de discussão e de reformulações ao longo dos séculos. Não é uma questão de lógica mas sim de imaginação!

Aristóteles fez a distinção entre *infinito potencial* e *infinito actual* e esta distinção foi retomada, no século XIX, por Cantor com a teoria de conjuntos infinitos, que são por ele apresentados como *infinitos actuais*.

Ao longo dos séculos, o infinito foi tema de vários paradoxos, entre os mais conhecidos estão os de Zenão de Eleia. O infinito actual só foi aceite como objecto de estudo da Matemática quando se conseguiu explicar racionalmente os paradoxos que o envolviam.

Segundo Hilbert (1921), *"a clarificação definitiva da natureza do infinito tornou-se necessária, não apenas por interesse especial das diversas ciências particulares, mas antes para a honra do próprio conhecimento humano"*. E acrescenta que *"o infinito atormentou, desde sempre, a sensibilidade dos homens; mais do que qualquer outra ideia, a de infinito solicitou e fecundou a sua inteligência; mais do que nenhum, o conceito de infinito tem que ser elucidado."*

2.1. Na Grécia Antiga

Na Grécia antiga, surgiram as primeiras preocupações em definir e interpretar o infinito.

Demócrito não considerava apenas a matéria, mas também o tempo e o espaço conduzindo-se assim à noção de quantidade infinitesimal: um número maior que zero, mas infinitamente pequeno, tão pequeno que não importa quantas vezes é adicionado a si próprio, permanecendo igual.

No entanto, Zenão, no século IV a.C., com os seus argumentos, mostrou que não fazia sentido falar numa recta como uma sequência de segmentos de comprimento infinitamente pequeno, nem no tempo como uma sucessão de instantes infinitesimais (os argumentos de Zenão serão explorados numa fase posterior deste trabalho).

Assim, Aristóteles (séc. IV a.C.) acaba por banir o infinitamente pequeno ou grande da geometria. Para ele não existia grandeza infinita em conceitos abstractos nem sequer em qualquer dimensão física. O que está para além da compreensão, só pode existir potencialmente porque está para além da realidade. Ele admitiu o infinito potencial e negou qualquer possibilidade de tratar racionalmente o infinito actual. O infinito só existiria em potência e por dedução.

A palavra *infinito* aparecia na Grécia antiga, essencialmente ligada à mitologia, à teologia e à metafísica (como substantivo) ou para qualificar mentalmente acções que podiam ser continuadas indefinidamente (como advérbio). Para Aristóteles, em matemática, o infinito só existia como advérbio.

Aristóteles defendia que o infinito é potencial, nunca actual:

"*Por conseguinte, o número é infinito em potência, mas não em acto (…), este nosso discurso de modo algum pretende suprimir as investigações dos matemáticos pelo facto de excluir que o infinito por acréscimo seja de tal ordem que se possa percorrer em acto. Na realidade, eles próprios (os matemáticos), no estado actual, não sentem a necessidade do infinito (e, na verdade, não o utilizam), mas apenas de uma quantidade tão grande quanto quiserem, embora sempre finita (…)*".

Igualmente a Aristóteles, Arquimedes (séc. III a.C.) usou os infinitésimos na resolução de problemas sobre parábolas, fornecendo sempre uma prova alternativa para os seus resultados baseada no método da exaustão (que assenta apenas em construções finitas). Este método permite encontrar aproximações sucessivas de uma área por comparação com áreas conhecidas e foi usado, por Arquimedes, para determinar um valor aproximado para a área do círculo. No tempo de Arquimedes, não se consideravam somas infinitas de parcelas, mas apesar dos gregos não assumirem o infinito, este foi um dos métodos que mais contribuiu para o desenvolvimento de conceitos como o de limite. Arquimedes não teve coragem de dar o salto filosófico que daria, ousadamente, quase dois mil anos mais tarde, Galileu.

Numa carta-ensaio a Eratóstenes, Arquimedes não pôde negar o infinito actual no seu trabalho, quanto mais não seja para fazer uma ideia do resultado para o qual tende, e salienta:

"Estou convencido de que proporcionará não pequena utilidade à matemática. Na verdade, confio que alguns dos matemáticos actuais ou futuros, aos quais se apresente este método, encontrarão outros teoremas que nós ainda não descobrimos. "

O que veio a acontecer, no século XVII, com o método dos indivisíveis de Cavalieri e Torricelli, baseado no método mecânico de Arquimedes.

2.2. Na Idade Média

Até ao século XII nada parecia haver a acrescentar, ou seja, o infinito actual continuava a ser negado e representava, para os cristãos deste século, *"um desafio à única e absolutamente infinita natureza de Deus"*. Todavia, havia uma excepção: Santo Agostinho (séc. IV), que aceitava o infinito actual na mente divina:

"Dizer que nem a ciência de Deus é capaz de compreender as coisas infinitas é o que lhes falta ao atrevimento, para precipitar-se na voragem de profunda impiedade, que afirma não conhecer Deus todos os números. E muito certo que são infinitos. Com efeito, seja qual for o número que pretendas formar, não apenas pode aumentar pela adição de uma unidade, mas também, por maior que seja e por mais prodigiosa que seja a quantidade que encerra em si a razão e ciência dos números, não somente pode

ser duplicada, mas também duplicada ao infinito. (...) Tal infinidade conjunta de todos os números é que escapa à ciência de Deus, que compreende certa quantidade de números e ignora os demais? Quem o dirá, por mais louco que esteja? "

A obra de Santo Agostinho apresenta-se como o expoente máximo desta época e irá influenciar a filosofia medieval desde o século IX até o século XII. Entre os séculos V e IX (chamados séculos em branco) não surgiram novas ideias nem discussões sobre o infinito.

No século XIII, São Tomás de Aquino descobre que as traduções de Aristóteles não correspondiam às doutrinas originais e conseguiu mostrar que as verdadeiras teorias de Aristóteles eram compatíveis com as doutrinas cristãs e até as podiam sustentar do ponto de vista filosófico. Assim, a noção de infinito continuava meramente potencial, com excepção do infinito absoluto representado por Deus.

2.3. No século XVII

Foi já no século XVII, apesar de desconhecerem o método de Arquimedes, que Cavalieri, Torricelli e Galileu fizeram renascer a ideia da possibilidade de divisão de um contínuo num conjunto infinito de partes indivisíveis.

Cavalieri fundou e Torricelli desenvolveu a *"geometria dos indivisíveis",* sobre a qual viria mais tarde a fundamentar o cálculo infinitesimal. Galileu, por razões filosóficas e físicas, afirmou, de uma maneira mais clara e ousada que os seus discípulos Cavalieri e Torricelli, que era possível reduzir um contínuo limitado em elementos "primeiros" infinitos indivisíveis.

Galileu foi o primeiro a perceber que este facto poria em evidência certos paradoxos e por isso teve alguma prudência em termos matemáticos. Preocupou-se mesmo com a comparação de dimensões de conjuntos infinitos pelo processo que ainda hoje usamos: a definição de correspondências.

Nos *Diálogos Relativos a Duas Novas Ciências* considera que os infinitos transcendem o entendimento finito (este será um assunto que abordaremos novamente mais à frente). Fazendo a correspondência, de um para um, entre todos os números naturais e os quadrados perfeitos, deparou-se com a propriedade fundamental de um conjunto infinito: uma parte pode ser equipotente ao todo. Embora Galileu afirmasse que o número de quadrados perfeitos não é menor que o dos números naturais, não conseguiu concluir que são iguais, argumentando antes que os atributos *"igual a"*, *"maior que"* e *"menor que"* não deveriam ser utilizados para comparar quantidades infinitas. Assim, Galileu defendia que não se poderia dizer que um conjunto infinito era maior, menor ou igual a outro conjunto infinito. Como refere Boyer (1984), Galileu, à semelhança de Moisés, chegou à terra prometida mas não conseguiu lá entrar.

Cavalieri, professor na Universidade de Bolonha, desenvolveu as ideias de Kepler no livro *Geometria indivisibilius continuorum*, que permitiu um maior entusiasmo dos matemáticos relativamente a problemas relacionados com os infinitesimais. Mais tarde, Jonh Wallis escreveu pela primeira vez ∞, para representar $\frac{1}{0}$, utilizou expoentes negativos, fraccionários e imaginários, introduziu séries infinitas. Este estudo de séries infinitas apoiou Isac Newton na teoria de fluxões, onde Newton denominou os infinitesimais de momentos de fluxões e introduziu a noção de limite embora de uma forma muito confusa.

Assim como Newton, também Leibniz encontrou o novo cálculo, mas este tinha uma abordagem mais geométrica, ao contrário da abordagem de Newton que era essencialmente cinemática. Devemos a Leibniz a notação matemática que usamos no cálculo de hoje, bem como os nomes calculus differentialis e calculus integralis.

Leibniz, numa das suas cartas a Foucher, elogia Grégoire de Saint Vicent por ter determinado o local exacto onde Aquiles iria encontrar-se com a tartaruga, tendo resolvido este paradoxo de Zenão, aceitando assim o infinito actual. No entanto, há que salientar que Leibniz só concebia o infinito/infinitesimal como facilitador do cálculo e cujo resultado se exprimia sempre em função de quantidades finitas.

2.4. No século XVIII

Os trabalhos Newton e de Leibniz foram continuados e cultivados por Euler e Lagrange que desenvolveram o moderno cálculo diferencial, contribuindo para o desembaraçar das questões metafísicas dos infinitamente pequenos e do infinito em acto, passando à formalização do conceito de limite.

Leonard Euler, considerado um dos mais produtivos matemáticos de sempre, escreveu praticamente a notação e linguagem que hoje usamos, tendo sido responsável, em grande parte, por exemplo, pela utilização dos símbolos π, e, i, … bem como a notação $f(x)$ para representar funções de x. Assim, a notação matemática, comummente aceite, provém de Euler. Euler escreveu *Introdutio in analysin infinitorium* e o primeiro volume desta obra aborda essencialmente processos infinitos. Euler mantinha uma correspondência frequente com o matemático parisiense Jean Le Rond d'Alembert.

A ideia de d'Alembert, de que o cálculo deveria assentar fundamentalmente na ideia de limite, não foi aceite pelos seus contemporâneos, tendo-se continuado a usar a linguagem de Euler e Leibniz. Por pensar em grandezas geométricas, d'Alembert nunca aceitou a existência de um infinito actual, pensando sempre na sua forma potencial, opondo-se aos pontos de vista destes matemáticos e afirmando que uma quantidade ou representa algo ou então não é nada.

Joseph-Louis Lagrange viveu durante a Revolução francesa, rejeitando completamente a teoria dos limites de Newton e de d'Alembert, dedicou-se à fundamentação do cálculo pela álgebra. A ele devemos a notação $f'(x)$, $f''(x)$, … , $f^{(n)}(x)$, …, para representar derivadas de várias ordens.

Lagrange pensava que podia eliminar a necessidade do uso dos limites ou infinitésimos, mas acabou por se deparar com algumas falhas nos seus argumentos.

2.5. No século XIX

Neste século surgiu uma nova geração de matemáticos, com mentes mais abertas e com novas perspectivas que iriam revolucionar vários campos da ciência, em parte, fruto de revolução francesa. Assim, a matemática passa a ser vista não apenas como uma ciência importante para a Mecânica e para a Astronomia, mas antes, como uma ciência autónoma. Deu-se uma separação dos matemáticos puros dos aplicados. Era uma época de reflexão sobre os fundamentos da Matemática, já não bastava obter resultados, era necessário reflectir sobre o seu significado, o que trouxe novamente a discussão do infinito actual.

Através do cálculo, Augustin Cauchy tentou dar resposta a uma série de paradoxos existentes desde o tempo de Zenão e tornou fundamental o conceito de limite de d'Alembert, de função, de integral como limite de uma soma, …

Karl Weierstrass fornece fundamentos sólidos para a Análise, eliminando os defeitos remanescentes do Cálculo. A importância do seu trabalho baseia-se no desenvolvimento de raciocínios que assentam no conceito de limite em geral, na clarificação das noções de mínimo de uma função, de convergência uniforme.

Os esforços de Cauchy, Bernhard Bolzano e Weierstrass em fundamentar rigorosamente os métodos do cálculo infinitesimal levaram a uma formalização rigorosa com base na noção de limite, que permitiu um novo tratamento matemático do infinito. Esta procura do rigor foi defendida por Leopold Kronecker. Para ele a Matemática deveria basear-se no número e todo o número nos números naturais, afirmando que *"Deus fez os números inteiros e os homens fizeram o resto"*, rejeitando assim o infinito actual.

Foi só no final do século XIX, que a questão levantada, no século XVII, por Galileu, renasceu com o livro *Os paradoxos do Infinito* de Bolzano, embora as análises não tenham ido suficientemente longe.

Bolzano sentiu necessidade de um novo conceito de infinito e justificou a existência de tantos paradoxos relativos a esta ideia pela falta de precisão do termo. Para tal, adoptou uma concepção sintética de conjunto, onde um conjunto é concebido como um todo, sem ser necessário pensar isoladamente em cada um dos seus elementos:

"Posso pensar o conjunto, o agregado ou, se preferirem, a totalidade de habitantes de Praga ou de Pequim, sem formar uma representação, em separado, de cada um destes habitantes tomado singularmente, isto é, uma representação que lhe diga exclusivamente respeito". (Citado em Meschkowski, 1990)

Assim, introduziu o conceito, cuja existência até aí era negada, de infinito actual. Ele entendia por multiplicidade infinita, uma multiplicidade que é maior do que qualquer multiplicidade finita e provou que o conjunto das proposições e verdades em si tem multiplicidade infinita: se A for uma proposição verdadeira, a proposição B ("A é verdadeira") é outra proposição que pertence também ao conjunto; desta proposição B pode-se obter, pelo mesmo processo, a proposição C ("B é verdadeira"), diferente das anteriores, e assim por diante. Conclui então:

"O agregado de todas estas proposições, cada uma das quais está ligada à que a precede (...) por ter como sujeito essa mesma proposição precedente e como conteúdo a afirmação de que tal proposição é verdadeira, compreende um conjunto de elementos (proposições) que é maior do que qualquer conjunto finito. (...) podemos sempre continuar a construção de novas proposições, ou, para melhor nos exprimirmos, (...) elas existem por si, quer nós as construamos quer não. Segue daí que o agregado de todas estas proposições possui uma multiplicidade que é maior do que qualquer número, e que é portanto infinita". (Citado em Meschkowski, 1990)

Bolzano dá outros exemplos de outros conjuntos infinitos para continuar a explicar as suas concepções:

- O conjunto dos números inteiros, e por maioria de razão, o conjunto das quantidades:

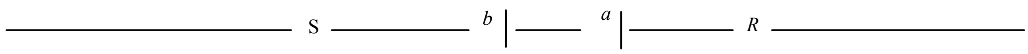
"Se o conjunto dos números (e precisamente dos chamados números inteiros) é infinito então, por maioria de razão, o conjunto das quantidades (...) é um conjunto infinito. (...) não só todos os números são igualmente quantidades, mas existem também muito mais quantidades do que números, porque também as fracções $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},...$ *como ainda as chamadas expressões irracionais* $\sqrt{2},\sqrt[3]{2},...,\pi,e,...$ *indicam quantidades".* (Citado em Meschkowski, 1990)

- O conjunto dos pontos do tempo e do espaço:

"(...) tanto no tempo como no espaço, o conjunto das partes elementares, ou pontos, das quais um e outro são constituídos, é infinito. Na realidade, não só é infinitamente grande o conjunto das partes elementares de que a totalidade do tempo e a totalidade do espaço são constituídas, (...), mas é infinito também o conjunto daqueles pontos do tempo situados entre dois pontos temporais α *e* β *tão próximos um do outro quanto se queira, como ainda o conjunto daqueles pontos do espaço situados entre dois pontos espaciais* a *e* b *tão próximos um do outro quanto se queira".* (Citado em Meschkowski, 1990)

A fim de comparar conjuntos infinitos, era necessário saber quando é que dois conjuntos infinitos eram iguais ou diferentes quanto à sua multiplicidade. Para tal Bolzano tentou estabelecer um critério.

"Já dos exemplos até agora considerados não nos terá escapado que nem todos os conjuntos infinitos devem ser considerados iguais entre si no que respeita à sua multiplicidade; mas que, pelo contrário, algum deles pode ser maior (ou menor) do que um outro, quer dizer, pode incluir em si o outro como uma parte (ou, pelo contrário, ser ele próprio uma mera parte do outro). Também esta afirmação parece paradoxal a muita gente. E sem dúvida que todos os que definem o infinito como algo que não admite nenhum acrescentamento devem achar não só paradoxal mas até contraditório que um infinito seja maior do que um outro. Mas (...) esta opinião assenta num conceito de infinito que não está de acordo com o uso linguístico da palavra. De acordo com a nossa definição, que é conforme não só com o uso linguístico mas também com o objectivo da ciência, ninguém poderá encontrar algo contraditório, nem mesmo surpreendente, na ideia de que um infinito seja maior do que um outro. Para quem poderá não ser claro, por exemplo, que o comprimento da recta prolongada



ilimitadamente no sentido aR é infinito? Mas que a recta bR, percorrida no mesmo sentido a partir do ponto b, ainda deve ser dita maior do que aR, pela porção ba? E que a recta prolongada ilimitadamente em ambos os sentidos aR e aS deve ser dita maior, por uma grandeza que é ela própria ainda infinita?" (Citado em Meschkowski, 1990)

Assim, o critério que Bolzano usava, para comparar cardinais de conjuntos infinitos, era a inclusão de conjuntos. Mas a existência de correspondências bijectivas entre conjuntos infinitos, que pelo critério que usava eram de diferentes multiplicidades, não lhe passaram despercebidas, apercebendo-se também de, os conjuntos infinitos, poderem ser postos em correspondência bijectiva com uma sua parte própria. No livro *Os paradoxos do infinito* pode ler-se:

"Passemos agora à consideração duma particularidade altamente notável que pode ocorrer na relação entre dois conjuntos quando ambos são infinitos, e que na verdade ocorre sempre, mas que até agora tem sido descurada, com prejuízo do reconhecimento de algumas verdades importantes tanto na Metafísica como da Física e da Matemática, e que certamente também agora, quando eu a proferir, será em tal grau tida como paradoxal que seria bem necessário demorar um pouco mais na sua consideração. É que eu afirmo: dois conjuntos, que sejam ambos infinitos, podem estar em tal relação entre si que, por um lado é possível ligar num par cada uma das coisas pertencentes a um dos conjuntos com uma do outro, de tal modo que nenhuma das coisas em ambos os conjuntos fique sem ligação num par e também que nenhuma ocorra em dois ou mais pares; e por outro lado é ao mesmo tempo possível que um destes conjuntos contenha o outro como uma mera parte, de tal modo que as multiplicidades que [os conjuntos] representam, quando consideramos todas as suas coisas como iguais, isto é, como unidades, têm entre si relações mais variadas". (Citado em Meschkowski, 1990)

Seguidamente, para esclarecer as suas afirmações, Bolzano exemplifica com o caso do conjunto das grandezas compreendidas entre 0 e 5 e o conjunto das grandezas compreendidas entre 0 e 12, explicando a existência de uma bijecção entre eles, embora, com o seu critério, o conjunto das grandezas entre 0 e 5 seja menor do que o outro conjunto.

"Se tomarmos duas grandezas (abstractas) arbitrárias, por exemplo 5 e 12, é claro que o conjunto das grandezas compreendidas entre 0 e 5 (ou que são menores do que 5), tal como o conjunto das grandezas que são menores do que 12, é infinito; e é igualmente certo que o último destes conjuntos se deve dizer maior do que o primeiro, pois este é incontestavelmente apenas uma parte daquele. (…) Mas não menos verdade do que tudo isto é o que se segue: se x designar uma qualquer grandeza compreendida entre zero e 5 e determinarmos a relação entre x e y através da igualdade 5y=12x, então também y será uma grandeza situada entre zero e 12;e reciprocamente, sempre que y estiver compreendida entre zero e 12, x estará compreendida entre 0 e 5. Também decorre daquela igualdade que a cada valor de x apenas corresponde um valor de y e reciprocamente. Mas destes dois [factos] fica claro que, para cada uma = x no

conjunto das grandezas compreendidas entre 0 e 5, há uma = y no conjunto das grandezas compreendidas entre 0 e 12 que se pode ligar àquela num par, de tal modo que nenhuma das coisas que constituem estes dois conjuntos fica sem ligação num par e também que nenhuma ocorre em dois ou mais pares". (Citado em Meschkowski, 1990)

Contudo, a existência de tal bijecção não bastava para justificar que os cardinais eram iguais, para Bolzano seria necessário acrescentar, por exemplo, que os dois conjuntos estivessem definidos de modo idêntico.

"Ora, meramente pela razão de que dois conjuntos A e B estão em tal relação entre si que nós, para cada parte a ocorrente num deles, A, procedendo de acordo com uma certa regra, possamos escolher uma parte b ocorrente em B, de tal modo que todos os pares (a + b) que assim construamos contenham cada coisa encontrável em A ou em B e contenham cada uma apenas uma vez, - meramente por esta circunstância ainda não é – como vemos – de modo nenhum lícito concluir que estes dois conjuntos, se forem infinitos, são iguais entre si com respeito à multiplicidade das suas partes (isto é, quando se abstrai de todas as diferenças das mesmas); pelo contrário, apesar daquela relação entre eles, e por si só é certamente simétrica, podem ter uma relação de desigualdade na sua multiplicidade, de modo que um deles se possa evidenciar como um todo e o outro como uma parte dele. Só se pode concluir uma igualdade destas multiplicidades quando alguma outra razão se acrescentar a isso, como que ambos os conjuntos sejam determinados de modo idêntico, por exemplo mediante idêntica lei de formação". (Citado em Meschkowski, 1990)

Ora, daí em diante, os matemáticos adoptaram uma concepção sobre o infinito muito próxima da de Bolzano. Embora Bolzano não tenha posto de parte fundamentações em argumentos teológicos e tenha usado um critério de comparação de cardinais infinitos inadequado para muitas situações, podemos considerar que Bolzano foi precursor de Cantor.

Por seu lado, Cantor, elogiou os contributos de Bolzano para a matemática e para a filosofia, embora o tenha criticado em alguns aspectos: pouca clareza na noção de infinito actual e falta de desenvolvimento da ideia de potência de um conjunto infinito.

Para Cantor estes eram dois conceitos essenciais, sem os quais seria impossível estabelecer uma teoria completa sobre o infinito actual. Mesmo assim, é inegável a admiração que Cantor sentia por Bolzano, quer na sua tentativa de mostrar que os paradoxos podiam ser explicados, quer pela sua ousadia em defender a introdução do infinito actual em matemática.

Duas dezenas de anos mais tarde, Cantor e Dedekind introduziram novamente a questão do infinito em acto, mas desta vez sem ambiguidades, obscuridade, misticismo.

Dedekind, foi professor na Techishe Hochschule de Brunswick, elaborou uma teoria rigorosa sobre irracionais, tendo como fonte de inspiração a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido. Dedekind criou os números reais e estabeleceu uma correspondência biunívoca entre pontos da recta e os números reais.

Como já foi referido, Galileu considerava paradoxal a existência de uma bijecção entre um conjunto infinito e um subconjunto nele estritamente contido. Bolzano afirmou, embora vagamente, que esse caso "ocorre sempre" em conjuntos infinitos, mas não concluiu nada mais.

Ora, Dedekind encontrou neste paradoxo a melhor maneira de definir um conjunto infinito e expõe as suas ideias no livro *Was sind und was sollen die Zahlen?* (O que são e para que servem os números?). Deste modo, *"diz-se que um sistema [conjunto] S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo, caso contrário S diz-se finito"* (citado em Boyer, 1998 [1968]), ou seja, um conjunto S é infinito se e só se é equipotente a uma parte própria e esta é a definição de conjunto infinito mais correntemente utilizada até hoje. Note-se que sempre se definiu uma quantidade infinita pela negativa, isto é, considerando infinita aquela que não é finita. Daí que esta definição tenha sido, também neste sentido, uma novidade.

Mas foi Cantor quem fez com que os conjuntos infinitos se convertessem definitivamente em objecto de estudo matemático.

Relembremos então o paradoxo que tanto atormentou Galileu: uma parte não pode ser igual ao todo. Consideremos o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto A, constituído pelos seus quadrados. Apesar de ser claro que nem todos os números são quadrados, também não é difícil compreender que se pode estabelecer uma bijecção entre os dois conjuntos. Daí o paradoxo: os dois conjuntos são equicardinais, mas um contem o outro – o todo é igual a uma parte.

Segundo Radice (1981), foi com grande simplicidade que Cantor clarificou que, no caso de um conjunto infinito, pode acontecer que o conjunto e a sua parte, embora não idênticos, sejam equipotentes, tenham a mesma potência, o mesmo cardinal. E aqui está a grande diferença entre Cantor e Bolzano. De acordo com Waldegg (1991), a teoria de Cantor representa um ponto de viragem do infinito actual em matemática. É a partir deste momento que o infinito atinge uma posição permanente como objecto de estudo com operatividade própria.

Cantor desenvolveu uma teoria que explicava os diferentes conjuntos infinitos, a teoria dos números cardinais transfinitos, baseada num tratamento matemático ao infinito actual. Criou então, um novo tipo de número: o transfinito; devido aos números 1, 2, 3, 4 … não permitirem a contagem dos elementos dos conjuntos infinitos, existindo depois do finito, um transfinito que pode ser definido de forma precisa. Ao conjunto numerável atribui o menor cardinal transfinito $\aleph_0$ e ao continuo um número transfinito maior.

Para desenvolver os seus trabalhos em Análise foi necessário fazer uma construção rigorosa dos números reais que assentasse apenas na aritmética. Para isso era necessário utilizar certos conjuntos de pontos, efectuar operações sobre esses conjuntos, considerar sucessões dos mesmos. Tal como Cantor, Dedekind e Weirstrass sentiram essa necessidade, porém este foi mais longe.

No século XIX, estava mais ou menos aceite que a existência de uma bijecção entre dois conjuntos permitia concluir a igualdade da quantidade dos seus elementos. Mas será que podemos estabelecer uma bijecção entre dois conjuntos infinitos? Em caso afirmativo, os conjuntos têm o mesmo cardinal, caso contrário podemos concluir que existem infinitos de tamanhos diferentes.

Cantor mostrou que, de facto, existem infinitos de tamanhos iguais e diferentes e foi mais além que Dedekind, ao afirmar que os conjuntos infinitos não eram todos iguais em tamanho. Numa das cartas que escreveu a Dedekind, facto que era habitual, afirmou que os conjuntos dos números naturais e dos números reais não podiam ser postos em bijecção. Ficando então provado que os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ têm o mesmo cardinal, que o conjunto dos números racionais é numerável, que o conjunto dos números reais não é numerável e que o conjunto dos pontos de um quadrado é equivalente ao conjunto dos pontos do seu lado. Assim como, que o conjunto $\mathbb{N}$ tem menor cardinal que o conjunto $\mathbb{R}$, pois $\mathbb{N}$ é uma parte de $\mathbb{R}$ e uma parte de qualquer conjunto não pode exceder essa quantidade em elementos.

Nesta fase, Cantor decidiu procurar os infinitos que estivessem entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ e maiores que $\mathbb{R}$. Uma conjectura natural para encontrar infinitos maiores seria considerar conjuntos contínuos a duas ou mais dimensões e assim, noutra carta a Dedekind, Cantor mostrou uma prova que contradizia a sua própria intuição. Ele consegui estabelecer uma bijecção entre $[0,1]$ e $[0,1]^n$ (para $n \in \mathbb{N}$) mostrando assim que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ têm a mesma dimensão, quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$. A prova de que existem conjuntos com maior cardinal que o do $\mathbb{R}$ veio de uma proposição mais abrangente. O conjunto dos subconjuntos de um conjunto tem sempre mais elementos que o próprio conjunto, donde se pôde concluir existem infinitos maiores que $\mathbb{R}$. Já a ideia de infinitos intermédios entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, não foi demonstrada ou refutada por Cantor. Ele próprio nunca conseguiu demonstrar que não existe um infinito entre o numerável e o contínuo, isto é, simbolicamente que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, esta sua ideia ficou conhecida pela Hipótese do contínuo.

Cantor foi o principal responsável pela criação da Deutshe Mathematiker-Vereinigung (União Alemã de Matemática) e em 1891, no primeiro encontro da associação, em Halle, leu um artigo sobre o seu argumento diagonal em que procurava exactamente que, dado um conjunto, o conjunto das suas partes tem potência maior que esse conjunto.

As suas teorias para a Teoria de Conjuntos revolucionaram então a Matemática. O infinito actual finalmente tinha sido incorporado na Matemática. Note-se que um infinito actual é aquele que pode ser concebido como uma entidade completa, ou seja, todos os seus elementos podem ser pensados num acto único.

De acordo com Radice (1981), apesar das descobertas de Cantor destruírem ideias formuladas por célebres filósofos, como por exemplo Kant (para o qual *"infinito é uma grandeza acima da qual não é possível nenhuma maior")*, deram, pela sua simplicidade, origem a novas antinomias e a novos paradoxos que no entanto, extravasam já o âmbito deste trabalho. O próprio Cantor, em 1895, descobriu que não podia haver o conjunto de todos os conjuntos, mas vários dos seus problemas foram posteriormente solucionados no século XX.

2.6. No século XX

No inicio deste século ocorreu, em Paris, o segundo Congresso Internacional de Matemática, onde David Hilbert apresentou uma conferencia onde formulou uma lista com 23 problemas matemáticos que precisavam de resposta. O primeiro dos problemas referia-se à estrutura de continuidade dos números reais e mais explicitamente à Hipótese do contínuo. Hilbert questionou a existência de um cardinal entre o contínuo e o numerável e se o contínuo pode ser bem ordenado.

Do problema do contínuo de Cantor sobre a potência ou cardinalidade do contínuo ς, Hilbert questionou se é ou não a primeira a seguir à potência numerável, $\aleph_0$.

"I – Problema do Senhor Cantor relativo à potência do contínuo.

Todo o sistema infinito de números reais, isto é, todo o conjunto de números (ou pontos), ou é equivalente ao conjunto dos números naturais 1, 2, 3, ..., ou ao conjunto de todos os números reais, e por consequência ao conjunto, isto é, aos pontos de um segmento; de um ponto de vista equivalente, não há mais que dois conjuntos de números: os numeráveis e o contínuo.

A partir deste teorema podemos concluir igualmente que o contínuo apresenta o número cardinal imediatamente a seguir ao do conjunto numerável.

(...) O conjunto de todos os números não poderá ser ordenado de uma outra forma tal que todos os conjuntos parciais tenham um primeiro elemento? Dito de outra forma, será que o contínuo poderá ser considerado um conjunto bem ordenado?" (Hilbert, 1990 [1902])

Em 1908, Ernst Zermelo propôs a primeira axiomatização da teoria de conjuntos evitando assim as contradições existentes. Para um matemático, uma demonstração só é válida se for verificável e assim surge um novo problema, ou seja, a subjectividade inerente ao acto a verificar.

Hilbert na conferência de 4 de Junho de 1925, no congresso organizado pela Sociedade Matemática de Westfália, em Münster, afirmou que *"ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós"*.

"A Análise matemática constitui, por si mesma, uma sinfonia do infinito. (...) Mas a Análise, por si só, não nos dá ainda a visão mais aprofundada da natureza do infinito. Para obtê-la servimo-nos de uma disciplina que se aproxima de especulação filosófica geral e que estava destinada a dar nova luz a todos os complexos problemas que se referem ao infinito. Esta disciplina é a teoria dos conjuntos que foi criada por Georg Cantor. (...) Esta parece-me a mais maravilhosa florescência do espírito matemático e, sem dúvida, uma das mais altas realizações da actividade racional humana pura". (Hilbert, 1926)

Através da verificação mecânica, tentou mostrar a consistência de tal paraíso, mas o trabalho *Teoremas de incompletude* de Gödel-Russel marcou um ponto de inflexão nos fundamentos da Matemática. Note-se que um sistema axiomático deve satisfazer três condições: ser consistente, ser completo e cada postulado ser dependente dos outros.

Em 1931, Kürt Gödel demonstrou que o método axiomático apresenta limitações, ou seja, mostrou que existem verdades matemáticas impossíveis de demonstrar por via lógica e qualquer outro sistema lógico não demonstra a sua consistência lógica, surpreendendo assim os matemáticos de então.

Tal descoberta *"implica que a consistência de um sistema matemático não pode ser demonstrada excepto utilizando métodos mais poderosos do que os métodos de demonstração do próprio sistema".* (Cohen, 1966)

Os trabalhos de Gödel, em 1936, mostraram que a Hipótese do contínuo é compatível com a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel e em 1963 Cohen mostrou que a negação da Hipótese do contínuo também é compatível com os axiomas da teoria de Zermelo-Fraenkel. Assim, estes trabalhos mostraram que esta formulação não pode ser demonstrada ou refutada tendo em conta apenas os axiomas habituais da teoria de conjuntos.

Foi necessário esperar pela Análise Não-Standard em 1961, para os infinitésimos serem reconhecidos como entidades bem definidas e assim justificar os cálculos físicos que se faziam com eles, visto Cantor não reconhecer a existência de infinitamente pequenos.

3. Os primeiros paradoxos do Infinito

"Estas são dificuldades daquelas que derivam do discorrer que fazemos do nosso intelecto infinito em torno dos infinitos, denotando-os com os atributos que damos às coisas finitas e terminadas; o que penso é inconveniente."

Galileu Galilei

"Pode parecer (que um facto, que se verifica para os conjuntos finitos) deva acontecer mesmo quando os conjuntos, em vez de finitos, são infinitos. Pode parecer, disse; mas um estudo mais aprofundado revela que essa necessidade não existe, porque a razão pela qual (aquele facto) acontece em todos os conjuntos finitos reside exactamente na sua limitação e, portanto, não tem lugar nos infinitos."

Bernhard Bolzano

3.1. Paradoxos de Zenão

Zenão de Eléia (cerca de 450 a.C.) nasceu em Eléia, hoje Vélia, Itália. Filho de Teleutágoras, Zenão foi adoptado por Parménides na Escola de Eléia. Tornou-se um professor muito respeitado na sua cidade, e devido a isso, envolveu-se bastante com a política local. Juntamente com outros companheiros e conspiradores, Zenão tentou derrubar o tirano que governava a cidade. Foi preso e torturado até a morte. A partir da sua morte, tornou-se um herói, deixando uma marca na lembrança dos seus compatriotas contemporâneos.

Zenão defendeu de modo apaixonado a filosofia do seu mestre Parménides, para isso usou um método que consistia na elaboração de paradoxos. Deste modo, não pretendia refutar directamente as teses que combatia, mas sim mostrar os seus absurdos (e, portanto, a sua falsidade). Acredita-se que Zenão tenha criado cerca de quarenta paradoxos, todos contra a multiplicidade, a divisibilidade e o movimento (que nada mais são que ilusões, segundo a escola eleática).

Os seus paradoxos entravam em conflito com algumas concepções antigas e intuitivas sobre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande, pelo que trouxeram o horror ao infinito! Nessa altura, acreditava-se que a adição de uma infinidade de quantidades se podia tornar infinitamente grande tanto quanto se desejasse, mesmo que cada uma dessas quantidades fosse extremamente pequena, ou seja, simbolicamente obteríamos $\forall \varepsilon > 0, \infty \times \varepsilon = \infty$. Também se acreditava que a adição de um número finito ou infinito de quantidades de dimensão zero era zero, o que neste caso se traduziria simbolicamente por $n \times 0 = 0, \infty \times 0 = 0$.

Zenão desafiou estas concepções e enunciou argumentos para tentar provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade, criando quatro paradoxos, relativos ao movimento e ao tempo, que foram retomados por Aristóteles e que são conhecidos pelos nomes de Dicotomia, Aquiles, a Seta e o Estádio.

***Dicotomia*:** Um objecto que quer percorrer determinada distância tem primeiro que percorrer metade dessa distância, mas antes disso, tem de percorrer um quarto. Isto continua indefinidamente, até uma infinidade de subdivisões. Segue-se, então, que o movimento não pode chegar sequer a começar.

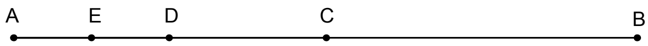
***Aquiles*:** Aquiles e uma tartaruga movem-se na mesma direcção ao longo de uma linha recta. Se Aquiles der algum adianto à tartaruga, nunca conseguirá alcança-la, já que quando ele atingir a posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado e se encontrará noutro local adiante dele, e quando ele chegar a essa nova posição, já a tartaruga terá realizado novo avanço; e assim sucessivamente.

A *Seta*: Uma seta lançada para o alvo está, na verdade, parada. Com efeito, em cada instante, a seta ocupa uma posição fixa, ou seja, em cada instante a seta está parada. Segue-se então, que a seta jamais se move.

O *Estádio*: Sejam três filas paralelas de atletas num estádio, uma imóvel e as outras correndo em sentidos opostos. Se passado um único instante de tempo, cada um dos atletas em corrida passar por um dos atletas em repouso, então um corredor de uma fila terá de ter passado por dois corredores da outra fila em movimento. Ou seja, um corredor de uma fila passa por um corredor da outra fila em metade desse tempo. Portanto, o instante de tempo é igual ao seu dobro.

Os dois primeiros paradoxos de Zenão mostravam que um segmento finito pode ser dividido num número infinito de pequenos segmentos, cada um deles com comprimento finito. Esta questão seria hoje descrita como a convergência de uma série real.

Na *Dicotomia*, a trajectória do objecto pode ser representada pelo segmento de recta $[AB]$, C o ponto médio de $[AB]$, D o ponto médio de $[AC]$, E o ponto médio de $[AD]$, e assim por diante.



Pela perspectiva de Zenão, teríamos

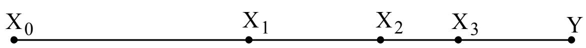
$$[AB] = \frac{[AB]}{2} + \frac{[AB]}{4} + \frac{[AB]}{8} + \frac{[AB]}{16} + \ldots + \frac{[AB]}{2^n} + \ldots$$

Mais sucintamente,

$$[AB] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[AB]}{2^n}$$

Em *Aquiles*, a ideia de subdivisão infinita é a mesma, apenas com a diferença de ser agora progressiva em vez de regressiva.

Se considerarmos X_0 a posição inicial de Aquiles, X_n (com n natural) a posição onde se encontra a tartaruga no instante em que Aquiles se encontra na posição X_{n-1}, e Y a posição em que *Aquiles* alcança a tartaruga.



O segundo argumento de Zenão chama a atenção para que

$$X_1Y = X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_4 + \ldots$$

Ou seja,

$$X_1 Y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n X_{n+1}$$

Segundo Boyer (1984), *"a Dicotomia e Aquiles argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo"*. Zenão mostrou que se os conceitos de contínuo e infinita divisão forem aplicados ao movimento de um corpo, então este torna-se impossível. Na verdade, a essência do movimento é tal que, quando vamos a querer fixar a posição de um objecto, em determinado instante, num ponto da sua trajectória, já ele aí não se encontra – entre dois instantes, por mais próximos que sejam um do outro, o objecto percorreu um segmento, com uma infinidade de pontos. Deste fenómeno se pode dizer, como Leonardo da Vinci disse da chama: *"olha para a chama e considera a sua beleza; fecha os olhos e torna a olhar: o que vês não estava lá e o que lá estava já não o encontras"*.

O paradoxo da *Seta* reflecte a impossibilidade de movimento se o espaço e o tempo forem compostos de partes indivisíveis. No *Estádio,* Zenão mostra que o intervalo de tempo que se considera não pode ser mínimo. Segundo Boyer (1984), *"a Flecha (Seta) e o Estádio, de outro lado, argumentam que também é impossível, sob a hipótese contrária – de que a subdivisibilidade do tempo e do espaço termina em indivisíveis"*.

Zenão apresentou paradoxos que mostravam as contradições existentes em considerar grandezas divisíveis infinitamente e em considerar grandezas indivisíveis. Os problemas que conduziram aos seus paradoxos diziam respeito à relação entre o infinito actual e o infinito potencial. A solução destes paradoxos exige uma teoria, como a cantoriana, que combine a nossa noção intuitiva de pontos e acontecimentos individuais com uma teoria sistemática de conjuntos infinitos.

3.2. Paradoxos de Galileu

Galileu nasceu em Pisa em 1564. Filho de um compositor e músico, ingressou, aos dezassete anos, na Universidade de Pisa no curso de Medicina, onde aproveitou para aprofundar a observação dos fenómenos da natureza e estudar textos de grandes autores clássicos como Arquimedes. No segundo ano do curso, que acabou por não concluir devido ao gosto que tinha pela Ciência e pela Matemática, descobriu que um pêndulo oscila com uma frequência constante (lei do isocronismo das pequenas oscilações).

Aos vinte e cinco anos de idade foi indicado professor de Matemática da Universidade de Pisa, tendo realizado experiências públicas sobre a queda dos corpos, enquanto exerceu essa função, desenvolvendo as primeiras ideias sobre o princípio da inércia.

Em 1592 torna-se professor na Universidade de Pádua, por quase dezoito anos, onde continuou as suas experiências e aulas, ganhando um amplo prestígio.

Galileu desenvolveu vários instrumentos como a balança hidrostática, um tipo de compasso geométrico que permitia medir ângulos e áreas, o termómetro de Galileu e o precursor do relógio de pêndulo.

No início do século XVII surgiram os primeiros telescópios. Galileu desenvolveu o seu próprio telescópio e foi o primeiro a observar quatro satélites luminosos de Júpiter, confirmando de maneira notável a teoria de Copérnico dos corpos pequenos girando em torno de outros maiores. Com o telescópio, Galileu observou as manchas do Sol, as montanhas da Lua, as fases de Vénus e os anéis de Saturno. Mas tais descobertas provocaram uma oposição fanática por parte de muitos homens da Igreja, que aceitavam a autoridade de Aristóteles; Aristóteles garantia que o Sol não tem manchas e que a Terra, e, portanto o homem, é o centro do Universo. Houve até quem acusasse Galileu de colocar os quatro satélites de Júpiter dentro do telescópio.

Por fim, em 1633, um ano depois da publicação de um livro em que sustentava a teoria de Copérnico, Galileu foi citado a comparecer perante a Inquisição, quando já doente e envelhecido, foi forçado, sob ameaça de tortura. O seu livro foi colocado no índex, onde ficou por dois séculos e apenas lhe permitiram continuar um trabalho científico inócuo, mas acabou por cegar e morrer em 1642, ainda sob a vigilância da Inquisição.

Um dos paradoxos mais famosos acerca do infinito é o que é apresentado por Galileu, o paradoxo dos naturais e dos quadrados, no livro *Discorsi e dimostrazioni matematiche a due nuove scienze.* Galileu encena uma conversa entre três personagens, Salviati, Simplício e Sagredo, que representam respectivamente, ele próprio, um sábio convencido da justeza das concepções de Aristóteles e um homem honesto para quem a demonstração e a experiência se sobrepõem ao conhecimento livresco.

Salviati leva Simplício a concordar que os números que são quadrados perfeitos são tantos quantos os próprios números naturais, mostrando-lhe a correspondência, a que hoje chamamos bijectiva, entre os dois conjuntos de números, depois de o ter feito reconhecer que os inteiros são mais do que os quadrados perfeitos sozinhos:

"Salviati. (...). Por consciência, se eu disser que os números tomados na sua totalidade, incluindo os quadrados e os não quadrados, são mais numerosos do que os quadrados sozinhos, enunciarei uma proposição verdadeira não é?

Simplicío. Certamente.

Salviati. Se eu perguntar agora quantos quadrados há, podemos responder, em nos enganarmos, que há tantos quantas raízes quadradas correspondentes, atendendo a que todo o quadrado tem a sua raiz e toda a raiz o seu quadrado, que um quadrado não tem mais que uma raiz, nem uma raiz mais que um quadrado.

Simplicío. Exactamente.

Salviati. Mas se eu perguntar quantas raízes há, não se pode negar que há tantas quantos os números, porque todo o número é a raiz de algum quadrado; assim sendo, será portanto preciso dizer que há tantos números quadrados como números, uma vez que eles são tantos como as raízes e que as raízes representam o conjunto dos números; e no entanto dizíamos de princípio que há mais números do que quadrados, já que a maior parte dos números são quadrados.

Sagredo. Então, qual a conclusão a tirar nestas condições?

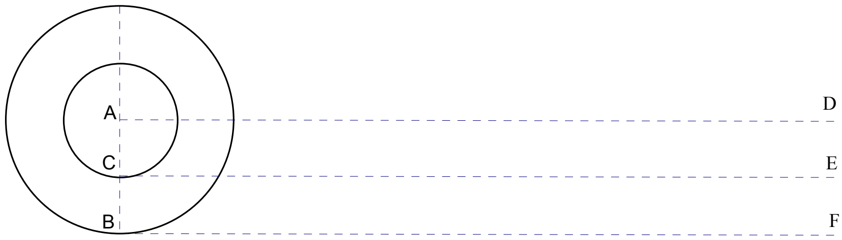
Salviati. Aos meus olhos, a única conclusão possível é dizer que o conjunto dos números, dos quadrados, das raízes é infinito; que o total dos números quadrados não é inferior ao conjunto dos números, nem este superior àquele. E finalmente, que os atributos igual, maior e menor não têm sentido para quantidades infinitas, mas somente para quantidades finitas". (Citado em Radice, 1981)

Galileu chegou à conclusão que para contar os quadrados perfeitos, podia estabelecer uma bijecção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos, concluindo assim que os quadrados perfeitos não eram menos do que os números naturais. A ideia, proveniente da famosa noção de Euclides – "o todo é maior que a parte" – de que os números naturais eram mais do que os quadrados perfeitos, impediu-o de declarar a igualdade de cardinais.

Outro paradoxo galileano é o das rodas, que consiste em duas rodas concêntricas, uma maior que a outra, que tocam com os seus pontos em dois segmentos de comprimentos iguais.

"Salviati. Mas diz-me se em torno de um centro, (...) este ponto A, descrevermos dois círculos e dos pontos C e B dos seus semi-diâmetros se traçarem as tangentes CE, BF e deles, pelo centro A, a paralela AD, considerando que o círculo maior gira sobre a linha BF (igual à da sua circunferência, assim como as outras duas CE, AD) e admitindo que há uma revolução, que terá feito o círculo menor e o centro? Este terá, sem dúvida, percorrido a linha AD, e a circunferência daquele terá, com os seus contactos, medido toda a CE (...). Portanto, como pode, sem saltos o círculo menor percorrer uma linha tão maior de que a sua circunferência (...). (Citado em Radice, 1981)

A situação pode ser representada da seguinte forma:



Mais uma vez se trata de uma bijecção entre dois conjuntos, o segundo dos quais pode ser considerado uma parte do outro. A circunferência mais pequena é, como comprimento, metade da maior. Assim, é possível estabelecer uma correspondência dos seus pontos com os de metade da circunferência de raio $[AB]$. Mas também podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos da mais pequena na da maior, tendo portanto uma correspondência biunívoca entre as circunferências.

O paradoxo reside na possibilidade de correspondência biunívoca entre um segmento contínuo e uma sua parte própria. Bernhard Bolzano falou deste assunto nos *Paradoxos do Infinito*.

Vejamos então a solução proposta por Galileu e de seguida a solução proposta por Bolzano. A solução que Galileu apresenta é negativa: não é possível com a nossa compreensão finita apurar o infinito. Ou seja, quando falamos em infinitos e em indivisíveis, os primeiros são incompreensíveis pela sua dimensão e os segundos pela sua pequenez.

Galileu enquanto matemático nega a possibilidade de raciocinar com argumentos necessariamente convincentes sobre o infinito. Mas, pelo contrário, enquanto filósofo, admite a possibilidade de fazer conjecturas, arbitrárias e não necessárias, sobre a natureza do infinito. Assim, como matemático afirma:

"Não vejo a que outra decisão possa chegar do que dizer que infinitos são todos os números, infinitos os quadrados, infinitas as suas raízes, nem que a multidão dos quadrados é menor que a de todos os números, nem esta maior que aquela, e, como última conclusão, os atributos de igual, maior e menor não terem lugar nos infinitos, mas apenas nas quantidades terminadas."

Totalmente diferente da opinião de Galileu é a opinião de Bolzano perante o infinito e em particular do paradoxo do todo e da parte.

Bernahrd Bolzano, nascido em Praga, actual República Checa, era filósofo, matemático e teólogo e deu importantes contributos tanto para a Matemática como para a Teoria do Conhecimento. Ele tentou, no seu trabalho, libertar o Cálculo da sua concepção infinitesimal. Para além de problemas ligados à Matemática, estudou problemas ligados ao espaço, à força e à propagação das ondas.

Filho de um comerciante de artes, frequentou a Universidade de Praga, onde estudou Teologia, Matemática e Filosofia. Foi ordenado sacerdote da Igreja Católica e foi designado para leccionar religião, na universidade onde estudou.

Os estudos científicos de Bolzano foram muito avançados para o seu tempo, nos fundamentos de vários ramos da Matemática, como a teoria das funções, a lógica e a noção de cardinal. Depois de demonstrar o teorema do valor intermédio, deu o primeiro exemplo de uma função contínua não derivável em nenhum ponto do conjunto dos números reais. No campo da lógica, estudou a tabela de verdade de uma proposição e introduziu a primeira definição operativa de dedutibilidade.

Para ele bastava caracterizar um conjunto pelas suas propriedades, e não ter de enumerar todos os elementos desse conjunto, ou seja, um conjunto é um todo.

Bolzano tentou estabelecer um critério de comparação entre conjuntos infinitos. Analisou o paradoxo de Galileu relativo à correspondência, um a um, entre os números naturais e os quadrados perfeitos e mostrou, embora vagamente, que as correspondências entre um conjunto infinito e um seu subconjunto próprio são comuns a todos os conjuntos infinitos. No entanto, considerava que não era suficiente, para concluir que tais conjuntos tinham o mesmo cardinal, a existência de uma bijecção entre os conjuntos, para que pudessem ter o mesmo cardinal, era necessário estar, por exemplo, definidos de modo idêntico:

"Quando dois conjuntos são infinitos, pode haver uma relação tal que, por um lado é possível associar cada elemento do primeiro conjunto com algum elemento do segundo de tal forma que nenhum elemento dos dois conjuntos fique sem associação, e por outro lado é possível que um conjunto possa conter o outro como uma parte de si.

É insuficiente que se possam equiparar os elementos de dois conjuntos (infinitos)… Só se pode concluir uma igualdade destas multiplicidades se ambos os conjuntos forem determinados de modo idêntico."

4. O paraíso que Cantor criou

George Ferdinand Ludwig Philip Cantor, cujos pais eram dinamarqueses, nasceu em 1845, em S. Petersburgo, Rússia, mas passou a maior parte da sua vida na Alemanha. O seu pai era judeu convertido ao protestantismo e a sua mãe católica de nascimento. Cantor interessou-se fortemente pela teologia medieval sobre a continuidade e o infinito. Como consequência, não seguiu uma carreira em engenharia como lhe sugeria o seu pai, a fim de se concentrar em Filosofia, Física e Matemática.

Estudou em Zurique, Göttingen e Berlim, onde ensinavam, além de Kummer, Leopold Kronecker e Karl Weierstrass. Talvez por influência de Kummer e Kronecker, Cantor interessou-se particularmente por teoria de números, tendo sido este assunto tanto da sua tese de doutoramento como do trabalho que apresentou para ser admitido como docente na Universidade de Halle (uma universidade de província considerada pouco importante), onde leccionou entre 1869 e 1905.

Faleceu em 1918 no hospital de doenças mentais de Halle.

As descobertas de Cantor sobre a teoria de conjuntos assentam sobre uma ideia muito simples. Como comparar conjuntos se não se conseguir contar os seus elementos?

Qualquer criança, muito antes de aprender a contar, sabe que a mão direita tem tantos dedos quantos da mão esquerda. Ora, "tantos…quantos" é a maneira pela qual não só as crianças, mas também, em geral, as pessoas normais, exprimem o conceito de correspondência biunívoca. Pois bem, basta colocar cada dedo de uma mão em frente ao correspondente dedo da outra mão para concluir que ambas têm o mesmo número de dedos.

De uma forma intuitiva, a correspondência, um a um, entre dois conjuntos A e B trata-se do emparelhamento dos elementos de um conjunto com os do outro, de tal modo que todos os elementos de cada conjunto têm exactamente um correspondente no outro conjunto.

"Se eu puder corresponder, elemento por elemento, dois conjuntos bem definidos M e N por uma operação unívoca (e, quando se pode fazê-lo duma maneira, pode-se fazê-lo também de muitas outras) (...) digo que estes conjuntos têm a mesma potência, ou ainda que eles são equivalentes". (Cantor, 1883 [1887])

Segundo esta definição, pode procurar-se a equivalência de grandes conjuntos, como o dos lugares de um estádio e o dos espectadores que os ocupam para assistir a qualquer acontecimento: se houver espectadores sem lugar, ou se sobrarem lugares não ocupados, os dois conjuntos não são equivalentes; caso contrário, são.

A definição de Cantor não exige que contemos, ou mesmo que conheçamos, as populações dos dois conjuntos para determinar se são ou não equivalentes.

Como diz Radice (1981), Cantor teve a ousadia intelectual, que duzentos e cinquenta anos antes faltou a Galileu Galilei, de aplicar a definição infantil de igualdade do número cardinal de dois conjuntos ao caso de conjuntos infinitos, afirmando que uma parte pode ser equivalente ao todo quando se trata de conjuntos infinitos.

Na obra de Galileu *Diálogos de Duas Novas Ciências*, escrita dois séculos e meio antes de Cantor, o grande cientista italiano chamou a atenção para a correspondência, de um para um, entre o conjunto dos números naturais e os seus quadrados, embora intuitivamente parecesse haver muito menos quadrados do que números naturais.

A contradição que se deparou a Galileu resolve-se com facilidade, tendo apenas em atenção que o mesmo adjectivo, igual, pode ser empregue com dois significados diferentes.

Um deles, com origem em Aristóteles, baseia-se no facto de a parte não poder ser igual ao todo, na medida em que no todo existe pelo menos um elemento que não está na parte.

O outro, cantoriano, considera que a parte pode ser igual em número ao todo.

Assim, Cantor não só afirmou que a correspondência, de um para um, entre o conjunto dos números naturais e os seus quadrados deveria ser literalmente aceite, como também provou que o conjunto dos números pares, dos ímpares, dos números triangulares, …, podem estar em correspondência, um a um, com o conjunto dos números naturais, ou seja, têm todos a mesma potência, o mesmo cardinal.

Cantor mostrou então que qualquer subconjunto infinito dos números naturais é equipotente a $\mathbb{N}$.

Quando consideramos ao mesmo tempo conjuntos finitos e infinitos, a equipotência de um conjunto com uma sua parte própria torna-se uma característica específica dos conjuntos infinitos.

Assim, em 1888, Richard Dedekind definiu um conjunto infinito como aquele em que se pode estabelecer uma bijecção com um seu subconjunto próprio. Com esta definição, Dedekind revolucionou uma maneira de pensar milenária. Agora já não se necessita de definir um conjunto infinito com a negação do que é finito, podemos, pelo contrário, definir o finito como negação do que é infinito, ou seja, um conjunto é finito se não estiver em bijecção com nenhuma parte própria.

O conjunto infinito mais pequeno é o conjunto dos números naturais, cujo cardinal é denotado pelo símbolo $\aleph_0$ (álefe-zero), de acordo com a primeira letra do alfabeto hebraico. Este número é o número infinito mais pequeno.

Cantor ficou seduzido pela estranha aritmética do aléfe-zero:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 \text{ e } \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Ou seja, quando somamos 1 ao infinito continuamos a ter infinito, assim como, quando duplicamos o infinito continuamos a ter infinito.

Estas propriedades estavam no centro do paradoxo do Hotel de Hilbert, assim chamado em honra ao lendário matemático alemão David Hilbert.

Hilbert descreveu um hotel com um número infinito de quartos, numerados 1, 2, 3,... Uma noite, quando todos os quartos estavam ocupados, um hóspede solitário chega à procura de quarto. O recepcionista do hotel fez cada hóspede avançar um quarto, de maneira que o ocupante do quarto 1 fosse transferido para o quarto 2, o ocupante do quarto 2 para o quarto 3, e assim sucessivamente. Assim, depois de todas as mudanças feitas, o quarto 1 fica então livre para o novo hóspede! Na noite seguinte chegou um autocarro, com um número infinito de novos hóspedes, e nenhum dos antigos hóspedes tinha saído. *"Não há problema"*, anunciou o recepcionista. Desta vez, transferiu o ocupante do quarto 1 para o quarto 2, o do quarto 2 para o 4, o do 3 para o 6 e, em geral, o ocupante do quarto n para o quarto $2n$. Isto deixou desocupado um número infinito de quartos ímpares para os infinitamente muitos recém-chegados. Portanto, o passageiro número 1 do autocarro pode ir para o quarto 1, o número 2 para o quarto 3, o número 3 para o quarto 5, e em geral, o número n para o quarto $2n-1$. Mesmo que chegue uma infinidade de autocarros infinitos de turistas, toda a gente pode ser acomodada.

O hotel de Hilbert mostra que certos tipos de argumentos estão disponíveis no caso finito, mas não podem ser usados em qualquer outro caso: por exemplo, o "princípio da gaiola de pombos", que afirma ser impossível colocar $n+1$ objectos em n caixas colocando no máximo um em cada uma, é falso para qualquer n infinito, e em particular para $n = \aleph_0$.

Cantor chamou numerável ao conjunto dos números naturais e considerou que qualquer conjunto que estivesse em correspondência, um a um, com o conjunto dos números naturais também era numerável.

O próximo passo era responder à questão: Terão todos os conjuntos infinitos o mesmo cardinal?

Assim, surgiu a tentativa, bem sucedida, de estabelecer uma bijecção entre os números inteiros e os números naturais.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} 2n & se \quad n > 0 \\ -2n+1 & se \quad n \leq 0 \end{cases}$$

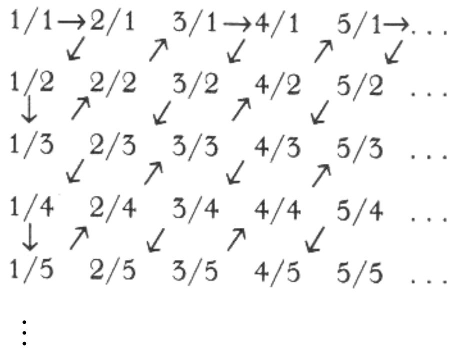
Cantor mostrou que, de facto, também o conjunto dos números inteiros tem tamanho álefe-zero e perguntou-se então se o conjunto dos números racionais teria também o tamanho álefe-zero (o que à primeira vista parece falso).

Estamos habituados à ideia de que há muito mais racionais do que naturais, porque os naturais têm grandes espaços entre si, enquanto os racionais estão densamente distribuídos. Por exemplo, se olharmos para o bordo de uma régua graduada vemos que, entre dois números naturais quaisquer, há espaço para uma infinidade de fracções, o que nos levaria a concluir que as fracções são infinitamente mais numerosas do que os naturais.

Mas, não obstante a aparências, Cantor provou que é possível emparceirar qualquer fracção com um número natural, apresentando uma demonstração engenhosa que mostra que existem também $\aleph_0$ racionais.

Cantor começou a demonstração por dispor todas as fracções do tipo $\frac{p}{q}$, com p, $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, numa matriz. A primeira linha contém, por ordem crescente, todas as fracções de denominador 1, a segunda linha todas as fracções cujo denominador é 2, e assim por diante.

Assim, usando o seu engenhoso "argumento diagonal", Cantor mostrou que se fizéssemos um percurso diagonal era possível pôr em correspondência, de um para um, os números racionais e os números naturais.



Cantor sabia, naturalmente, que algumas fracções se repetiriam e incitava que, quando se encontrassem representações alternativas, essas deveriam ser ignoradas.

O próprio Cantor ficou surpreendido com a sua demonstração de que o conjunto dos números racionais era numerável. *"Vejo que é assim"*, diz ele, *"mas não acredito"*. (Citado por Radice, 1981)

Depois de algumas coisas como estas, começamos a pensar se não são numeráveis todos os conjuntos infinitos. Talvez Salviati estivesse correcto e $\aleph_0$ seja apenas um símbolo rebuscado para ∞. Cantor mostrou que isto não é verdade. Há uma infinidade maior do que a infinidade dos números naturais: a infinidade dos números reais.

Cantor começou por imaginar todos os números reais numa lista simples, sem qualquer ordenação especial.

$$\begin{array}{l} a_1, b_{10}b_{11}b_{12}\ldots b_{1n}\ldots \\ a_2, b_{20}b_{21}b_{22}\ldots b_{2n}\ldots \\ \vdots \\ a_n, b_{n0}b_{n1}b_{n2}\ldots b_{nn}\ldots \\ \vdots \end{array}$$

Em seguida numerou as linhas dessa lista, ou seja, associou a cada número real um número natural.

$$\begin{array}{ll} 1 & a_1, b_{10}b_{11}b_{12}\ldots b_{1n}\ldots \\ 2 & a_2, b_{20}b_{21}b_{22}\ldots b_{2n}\ldots \\ \vdots & \\ n & a_n, b_{n0}b_{n1}b_{n2}\ldots b_{nn}\ldots \\ \vdots & \end{array}$$

Poderia parecer que existiriam números naturais suficientes para associar a todo o número real. Cantor procurou então determinar se as duas listas, de números naturais e números reais, se esgotariam igualmente. Em caso afirmativo, concluir-se-ia que os reais, como os naturais, eram $\aleph_0$, em número. No entanto, Cantor mostrou que a resposta era negativa, descobrindo que pelo menos um número real será sempre excluído dessa listagem, e portanto, não será emparceirado com um número natural.

Para encontrar esse número real, formemos um novo número cuja primeira casa decimal seja diferente da primeira casa decimal do primeiro número da lista; cuja segunda casa decimal seja diferente da segunda casa decimal do segundo número da lista; e em geral, cuja n-ésima casa decimal difira da n-ésima casa decimal do n-ésimo número da lista. Aí está!! Trata-se de um real que é diferente de todos os que figuram na lista e estão emparceirados com os números naturais, assim se provando que há mais números reais do que naturais.

Cantor, usando mais uma vez o seu "argumento diagonal", tinha encontrado um infinito maior, ao qual chamou álefe-um ($\aleph_1$).

Também com isto se prova que, enquanto podemos, em princípio, contar, um a um, a infinidade dos números naturais, nunca poderemos fazer o mesmo com os números reais. Cantor, reconhecendo este facto como consequência da sua demonstração, passou a referir-se aos números naturais como uma infinidade numerável e aos reais como uma infinidade contínua (ou não numerável).

Além de aplicar as noções de conjunto e equivalência aos números aritméticos, Cantor também as aplicou aos pontos geométricos, com resultados que a ele próprio surpreenderam e que contradiziam a sua própria intuição.

Em 20 de Junho de 1877, Cantor mostra a Dedekind a prova de que é possível estabelecer uma bijecção entre $[0,1]$ e $[0,1]^n$, provando assim que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ têm a mesma dimensão, quaisquer que sejam n, $m \in \mathbb{N}$, ou seja, que existe a mesma quantidade de pontos em todo e qualquer espaço independentemente da sua dimensão.

"Pode-se fazer corresponder de uma maneira completa e unívoca um conjunto contínuo a n dimensões a um conjunto contínuo de uma só dimensão; dois conjuntos, um de n e outro de m dimensões, sendo $n > m$, $n < m$ ou $n = m$, têm a mesma potência". (Cantor, 1883 [1887]).

Através desta ideia de comparação de conjuntos infinitos pela correspondência, um a um, entre os seus elementos, Cantor conseguiu distinguir vários tipos de conjuntos: os de menor potência como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, denominados numeráveis, e os com a potência do contínuo, como o intervalo $[0,1]$ ou $\mathbb{R}$.

A demonstração que permitiu Cantor concluir que a potência do contínuo é superior à do numerável, pode ser generalizada originando aquilo que ficou conhecido como o teorema de Cantor: O cardinal de um conjunto X é estritamente menor que o cardinal do conjunto P(X) das partes de X. Desta forma, através de conjuntos infinitos, Cantor conseguiu definir novos conjuntos infinitos.

"Esta demonstração parece digna de nota, não só em virtude da sua grande simplicidade, mas também, especificamente, porque o princípio nela seguido se torna igualmente extensivo ao teorema geral de que as potências de conjuntos bem definidos não têm máximo algum, ou seja, o que vem a dar no mesmo, que para cada conjunto dado L pode ser colocado ao lado de outro conjunto M de potência superior a L". (Cantor, 1883 [1887])

Pois bem, a existência de um conjunto infinito implica a existência de um conjunto infinito maior, que por sua vez, implica a existência de outro ainda maior e assim sucessivamente. Donde decorre a existência de uma infinidade de infinitos distintos.

Encontrámos, pois, um método para construir conjuntos transfinitos de potência continuamente crescente, até ao infinito. Consiste em repetir a operação de passagem de um conjunto ao conjunto das suas partes. Partindo de um transfinito mínimo, que é o numerável, potência do conjunto dos naturais $\mathbb{N}$, podemos construir a escala:

$$\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), P(P(\mathbb{N})), \ldots$$

Representando por $|L|$ a potência, ou cardinalidade de um conjunto L, Cantor mostrou que se for k o cardinal de um conjunto X, então $|P(X)| = 2^k$, e que, em particular, $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|}$, o que lhe permitiu construir a seguinte extensão transfinita dos cardinais

$$|\mathbb{N}|, |P(\mathbb{N})|, |P(P(\mathbb{N}))|, \ldots$$

que designou por

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$$

Assim, segundo Guillen (1983), os números transfinitos ($\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$) aparecem a Cantor e a outros como sendo tão sem limites como o cosmos descrito por Emmanuel Kant:

"É natural olhar [as nebulosas de] estrelas como sendo [...] sistemas de muitas estrelas. [Elas] são exactamente universos. Pode-se, além disso, conjecturar que [todas juntas] [...] constituem, por sua vez, um sistema ainda mais imenso [...] o qual, talvez, e tal como o primeiro, nada mais é do que um membro numa nova combinação de membros! Nós [na Terra] vemos [só] os primeiros membros de uma relação progressiva de mundos e sistemas, e a primeira parte desta infinita progressão habilita-nos a reconhecer o que se deve conjecturar sobre o todo. Não há qualquer fim…"

Cantor supôs que álefe-um seria o cardinal de $\mathbb{R}$, mas deixou a seguinte questão por resolver: há alguma coisa entre $|\mathbb{N}|$ e $|\mathbb{R}|$? Este problema tornou-se conhecido como a *Hipótese do contínuo*. Qualquer tentativa de a provar falhou tristemente; mas o mesmo aconteceu a todas as tentativas de construir um conjunto com mais elementos que os naturais, mas menos que os reais. Só em 1963, Paul Cohen provou que a resposta depende da nossa versão de teoria de conjuntos: teorias de conjuntos cantorianas ou teoria de conjuntos não cantorianas. Assim, Cantor, como não conseguiu então obter a resposta à questão, manteve a designação ς para o cardinal do conjunto $\mathbb{R}$.

Em 1874, Cantor publicou o seu trabalho, que o levara dos conjuntos finitos aos conjuntos infinitos e mais longe ainda. Cantor afirmava *"não alimento qualquer dúvida em relação à veracidade dos números transfinitos, os quais identifiquei com a ajuda de Deus"*. (Citado por Hoffman, 1998)

Segundo Guillen (1983), muitos matemáticos chamaram Cantor à pedra, desclassificando sumariamente os resultados da sua teoria, porque discordavam da ideia platónica de tratar o infinito como se ele fosse um substantivo. Outros entendiam que Cantor não prosseguira a argumentação até às suas conclusões lógicas. Para eles, Cantor deveria tratar a sequência de números transfinitos como fizera com a dos números naturais – admitindo a existência dum conjunto álefe-infinito. Este novo conjunto conduziria a uma sucessão inteiramente nova maior do que $\aleph_\infty$. Ou seja, iríamos chegar a conjuntos transtransfinitos, que seriam representados pela segunda letra do alfabeto hebraico,], originando a sucessão $]_0,]_1,]_2, ...$ Mas esta nova sucessão implicaria a existência do conjunto bete-infinito ($]_\infty$), voltando-se a repetir todo o processo mais uma vez, e outra, e outra,…

Cantor nunca se deixou persuadir por estas críticas.

Alguns matemáticos falam dum “infinito absoluto”, representado pela última letra do alfabeto hebraico, ω , que consideram ser o maior infinito concebível, um infinito que nunca poderemos visualizar.

O ω dos matemáticos é qualquer coisa que nunca contemplaremos em pleno e, a esse respeito, não muito diferente do Deus descrito por São Gregório: “*Independentemente do progresso feito pela nossa mente na contemplação de Deus, ela não atinge o que Ele é, mas sim o que lhe está abaixo”*.

Leoplod Kronecker, um pilar da comunidade matemática alemã, foi talvez o maior opositor do trabalho de Cantor, atacando-o publicamente de forma feroz durante uma década. Kronecker rejeitou o transfinito, emitindo a sua frequentemente citada reprimenda: *“ Deus criou os inteiros e tudo o resto é obra do Homem”*. Para Kronecker, apenas os inteiros tinham existência real, todos os outros tipos de números eram apenas ilusões das imaginações hiperactivas dos matemáticos.

Segundo Edwards (1987), Cantor era, para Kronecker, *“simplesmente mais um jovem que tinha seguido Weirstrass pelo caminho errado e cujas formulações de ideias matemáticas eram desesperadamente mal guiadas”*.

Henri Poincaré, o grande geómetra francês, repetiu Kronecker e disse que as gerações futuras de matemáticos viram o trabalho de Cantor como *"uma doença da qual conseguimos recuperar"*.

Herman Weyl observou que a infinidade de infinitos de Cantor era *"névoa no nevoeiro"*.

Por outro lado, Adolf Hurwitz e Hadamard descobriram importantes aplicações da teoria de conjuntos em Análise e falaram sobre elas em prestigiadas conferências internacionais.

Também um dos maiores matemáticos do começo do século vinte, David Hilbert, elogiou Cantor, descrevendo a nova aritmética transfinita como *"o produto mais extraordinário do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da actividade humana no domínio do puramente inteligível"*. Segundo Boyer, onde almas tímidas tinham hesitado, Hilbert exclamava *"ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós"*.

Analogamente, o matemático-filófoso inglês B. Russell aplaudiu os talentos de Cantor como *"provavelmente os maiores de que a época podia orgulhar-se"*.

Enfim, como aconteceu com outras ideias incrivelmente originais, só aqueles que estavam preparados para fazer um esforço para as entender e usar no seu trabalho as apreciaram. Os críticos dos aspectos marginais, presunçosamente negativos, deixaram o seu sentido de auto-importância esmagar a sua imaginação e bom gosto. Hoje, os frutos dos esforços de Cantor formam a base de toda a Matemática.

5. Os Infinitésimos e a Análise Não-Standard

"It is that objects to $\sqrt{-1}$ *as involving any contradiction, nor, since Cantor, are infinitely great quantities objected to, but still the antique prejudice against infinitely small quantities remains."*

C. S. Peirce in "*The New Elements of Mathematics*"

O uso de números infinitos e infinitesimais em Matemática tem uma longa história: a ideia de infinitésimo é conhecida há pelo menos 23 séculos.

Banidos pela tradição Aristotélica, estes números acabaram por ser reintroduzidos no séc. XVII, nos primórdios da Análise, e os raciocínios baseados neles foram sempre, até ao aparecimento da Análise Não-Standard, fonte de controvérsia e desconfiança. Este facto levou a que os infinitésimos tenham tido uma existência quase sempre polémica, embora o seu uso nunca tenha deixado de constituir uma ferramenta utilizada na prática, por exemplo, por físicos e engenheiros.

No início do séc. XX foi encontrado o tratado " O Método", cuja existência era desconhecida até então, no qual Arquimedes afirmava que também usava os infinitésimos nos seus trabalhos, "*não para demonstrar resultados, mas sim para descobri-los"*. Este livro permite-nos compreender a forma como Arquimedes obtinha as suas ideias. Como a maior parte dos matemáticos, ele começava por obter resultados através de métodos nada rigorosos e depois polia-os até encontrar uma demonstração decente.

Arquimedes cortava sólidos numa infinidade de pedaços de espessura infinitesimal e pendurava-os numa balança abstracta, onde comparava a sua soma com um objecto conhecido. Descobriu, usando este método, o volume da esfera.

Outros matemáticos fizeram um uso semelhante de argumentos infinitesimais, por exemplo, Nicolau de Cusa descobriu a área do círculo cortando-o como uma tarte.

Nicolau de Cusa argumentava que o infinito era “*a fonte, o meio e, ao mesmo tempo, o objectivo inalcançável de todo o conhecimento”* (citado por Davis e Hersh, 1990). Também Demócrito encontrou o volume de um cone empilhando fatias circulares.

Na literatura, é frequentemente referido o facto das demonstrações de Arquimedes se basearem no chamado método da exaustão.

Os infinitésimos atormentaram a Análise dos séculos XVII e XVIII, embora os argumentos filosóficos acerca deles não tenham impedido que muito bom trabalho tenha sido feito.

Infelizmente, a história do Cálculo Infinitesimal ficou marcada por uma azeda disputa entre Newton e Leibniz acerca da prioridade da invenção. Acredita-se que foi Newton quem descobriu primeiro e Leibniz quem publicou os primeiros resultados de Cálculo Infinitesimal, mas que, no entanto, qualquer um dos dois criou o seu Cálculo sem conhecer o do outro.

O Cálculo Infinitesimal não foi aceite por todos. Vários cientistas e filósofos levantaram objecções de peso aos procedimentos propostos por Newton e por Leibniz. O conceito de quantidade infinitamente pequena permanecia excessivamente vago e as regras operatórias a que essas quantidades eram sujeitas pareciam contraditórias.

O crítico-mor do cálculo, o bispo George Berkeley, publicou em 1734 *O analista, ou um Discurso Destinado a Um Matemático Infiel. Onde Se Examina Se o Objecto, Príncipios e Implicação da Análise Moderna São mais Distintamente Concebidos, ou Claramente Deduzidos, do Que os Mistérios Religiosos e os Pontos da Fé. «Primeiro Tira a Trave do Teu Próprio Olho; e depois verás claramente para Tirar o Argueiro do Olho do Teu Irmão.».* Berkeley argumentou que no decurso de uma mesma demonstração não se pode dividir uma expressão por uma quantidade infinitesimal e, alguns passos adiante, considerar nulos todos os termos que admitissem essa mesma quantidade infinitesimal como factor.

Contudo, a utilização de números infinitos e infinitesimais persistiu durante todo o século XVIII e parte do seguinte.

Euler, os Bernoulli, Lagrange, d'Alembert, Bolzano e Cauchy, por exemplo, não só obtiveram excelentes resultados usando números infinitos e infinitesimais, como ainda se empenharam, sem contudo o conseguir, na sua fundamentação lógica.

Apesar dos sucessos obtidos, a noção de infinitésimo nunca foi devidamente clarificada e o seu uso imoderado conduziu o desenvolvimento do Cálculo a sérias inconsistências e dificuldades que não puderam então ser ultrapassadas.

No século XIX, Karl Weierstrass conseguiu finalmente obter uma formulação completa e rigorosa para os fundamentos do Cálculo, removendo qualquer referência a quantidades não finitas, redefinindo os conceitos base em termos da noção de limite. É o retorno a Aristóteles. Davis e Hersh (1990) comparam o método dos limites com o método de exaustão – ambos processos de tornear a utilização do infinito na argumentação matemática.

Desde então, todos os elementos estranhos ao conjunto $\mathbb{R}$ foram banidos da generalidade dos textos de Análise Matemática, embora a referência a infinitésimos tenha persistido até aos dias de hoje em textos de outras disciplinas científicas que fazem largo apelo ao Cálculo, como é o caso da Física.

Já na segunda metade do século XX, por volta de 1961, o matemático Abraham Robinson descobriu a Análise Não-Sandard (ANS), com origem na Lógica, que veio repor a possibilidade de tratamento formal dos infinitésimos. O seu aparecimento pode talvez situar-se, *oficialmente*, na data de publicação do artigo

Nonstandard Analysis,

Proc. Roy. Acad, Sci., Amesterdam (A), 64 (1961), pp437-440

onde A. Robinson, usou pela primeira vez um modelo Não-Standard da recta numérica para elaborar um desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal, que segue muito de perto o estilo dos seus criadores no século XVII, particularmente o de Leibniz. Posteriormente, no livro

Nonstandard Analysis,

North Holand, 1966

A. Robinson mostrou como se podem aplicar, com vantagem, os métodos da Análise Não-Standard a muitas áreas distintas da matemática.

Quantas vezes foi, anteriormente, o sistema de "números" estendido para adquirir uma propriedade desejada? Dos racionais para os reais para admitir $\sqrt{2}$; dos reais para os complexos para admitir $\sqrt{-1}$. Portanto, porque não dos reais para os hiper-reais para admitir infinitésimos?

Assim, na Análise Não-Standard existem números naturais ordinários $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$, mas existe também um sistema maior de números "não naturais", aquilo a que se chama de "naturais Não-Standard", $\mathbb{N}$*. Existem os inteiros, $\mathbb{Z}$, e os inteiros Não Standard, $\mathbb{Z}$*. E ainda os reais Standard, $\mathbb{R}$, mais os reais Não-Standard, $\mathbb{R}$*. E cada par não se distingue em termos de propriedades de primeira ordem, pelo que é possível provar as propriedades de primeira ordem de $\mathbb{R}$ trabalhando com $\mathbb{R}$*, se quisermos; mas $\mathbb{R}$* contém agora um conjunto de novos números como infinitésimos e infinitos, que podemos explorar de novas formas.

Assim, num universo Não-Standard, os reais coexistem com outros objectos, em particular com um número c que tem a propriedade de ser menor que qualquer número da forma $\frac{1}{n}$. Este número c é de facto um infinitésimo.

A análise Não-Standard não conduz, em princípio, a conclusões acerca de $\mathbb{R}$ diferentes das obtidas através da Análise Standard. É o método e o campo em que actua que são Não-Standard; mas os resultados são verdadeiros teoremas da nossa velha conhecida Análise, e portanto, qualquer teorema demonstrado por métodos Não-Standard é um teorema verdadeiro da Análise Standard (logo, admite uma demonstração Standard).

Também Newton mostrou, no seu *Principia*, que tudo o que pode ser provado com o Cálculo, também pode ser provado com a Geometria Clássica e de modo algum isto implica que o Cálculo não tenha qualquer valor.

Assim, a questão que se coloca agora é se a Análise Não-Standard é uma ferramenta mais poderosa ou não. Esta questão só pode ser resolvida através da experiência, e a experiência sugere que, maioritariamente, demonstrações usando Análise Não-Standard tendem a ser mais curtas e directas. No entanto, a Análise Não-Standard requer um background muito diferente do da Análise Clássica, o que se torna numa clara dificuldade, pois neste novo universo tem que se investir muito esforço inicial antes de se começar a ter lucro.

Desta forma, o método dos infinitésimos foi, pela primeira vez, dotado de uma fundamentação formal precisa. E o infinito actual voltou a emergir na Análise, povoando agora um universo que é maior do que o da Aritmética Real, ao qual podemos recorrer para resolver os nossos problemas em $\mathbb{R}$.

6. A Biblioteca de Babel

Nascido em Buenos Aires, no ano de 1899, Jorge Luís Borges teve uma educação de carácter anglófono. Após uma estadia em Madrid, onde entrou em contacto com movimentos vanguardistas, regressou a Buenos Aires e fundou as revistas *Prisma* e *Proa,* onde começou a publicar os seus poemas (que mais tarde foram reunidos em volumes como *Fervor de Buenos Aires* (1923) e *Caderno de San Martín* (1929).

Da obra de Jorge Luís Borges destacamos obras como *Ficções* (1944), *História Universal da Infância* (1935), *O Aleph* (1949) e O *Relatório de Brodie* (1970). De entre as suas melhores criações estão *Outras Inquirições* (1952) e *História da Eternidade* (1936).

Borges, eterno candidato ao Nobel, foi um autor inclassificável que não se encaixou nos paradigmas estilísticos e ideológicos marcados pelos escritores incluídos no chamado *boom* latino-americano.

Morreu em Genebra em 1986.

Ficções foi unanimemente considerado como um dos monumentos literários do século XX. Num diálogo constante entre a ficção e a realidade, o leitor é obrigado a tomar um papel activo, descobrindo que nessas "ficções", há algo além da diversão retórica ou de um passatempo mental, começa a vislumbrar a trama complexa de uma metafísica inquietante.

Ficções é composto por dois livros *O Jardim dos Caminhos Que Se Bifurcam* e *Artifícios*, que giram à volta das mesmas imagens e dos mesmos temas: o infinito, os jogos de espelhos, a cabala, os enigmas de detectives, o destino, o tempo, o fascínio pela palavra… Em todos os contos se respira um espírito atemporal, de universalidade, no qual se pode encontrar uma biblioteca com todos os livros possíveis, um homem de memória infinita e outro capaz de dar a vida a uma personagem sonhada.

De seguida analisar-se-á o conto *A Biblioteca de Babel*, do livro *O Jardim dos Caminhos Que Se Bifurcam.*

"(...) que a Biblioteca é total e que as suas estantes registam todas as possíveis combinações dos vinte e tal símbolos ortográficos (número embora vastíssimo, não infinito) ou seja, tudo o que nos é dado exprimir: em todos os idiomas. Tudo: a história minuciosa do futuro, as autobiografias dos arcanjos, o catálogo fiel da Biblioteca, milhares e milhares de catálogos falsos, a demonstração da falácia desses catálogos, a demonstração da falácia do catálogo verdadeiro, o evangelho gnóstico de Basilides, o comentário desse evangelho, o comentário do comentário desse evangelho, o relato verídico da tua morte, a versão de cada livro em todas as línguas, as interpolações de cada livro em todos os livros". (Borges, 1941)

A ficção de Borges reside em *"o universo (a que outros chamam a Biblioteca) compõe-se de um número indefinido, e talvez infinito, de galerias hexagonais"*(Borges, 1941), que contêm em quatro das suas paredes um total de vinte estantes. *"A cada uma das suas paredes de cada hexágono correspondem cinco prateleiras; cada prateleira contém trinta e dois livros de formato uniforme; cada livro é de quatrocentas e dez páginas; cada página, de quarenta linhas; cada linha de umas oitenta letras de cor negra".* (Borges, 1941)

Na Biblioteca de Babel nenhum livro é igual a outro, alguns podem apenas diferir num ponto ou numa vírgula. Tudo o que foi dito, tudo o que se dirá e tudo o que é dito encontra-se escrito nos livros da Biblioteca de Babel e um deles contém a explicação de todos os outros.

Na história começa-se por afirmar que *"o universo (a que outros chamam de Biblioteca)",* ou seja, a Biblioteca de Babel proposta por Borges é o próprio universo. O universo é formado por galerias hexagonais idênticas, que se interligam por vestíbulos e escadas, não havendo mais nada para além disso. O universo está nas possibilidades infinitas, capazes inclusive de predizer o destino de qualquer pessoa.

Uma das teorias, criadas aqui por Borges, traz à tona a importância de se saber o que se procura e onde, evitando tempo perdido. A eterna busca do catálogo dos catálogos – sugerida através de um método regressivo: *"para localizar o livro A, consultar previamente um livro B que indique o sítio de A; para localizar o livro B, consultar* *previamente um livro C, e assim por diante até ao infinito… ”* – e também por sua própria vindicação, mostra a importância dos bibliotecários neste universo.

Os livros da biblioteca estão ordenados por ordem de criação, e o catálogo dos catálogos, caso seja encontrado, revelará o exacto paradeiro de cada um. A partir do momento que existe um endereço para um hexágono, existirá um endereço para todos os outros hexágonos e por consequência também para cada livro. O arranjo dos livros nas prateleiras em pouco preocupa os bibliotecários, pois todo o tipo de mudança de localização que um livro possa sofrer já está prevista no catálogo dos catálogos.

Note-se que a razão de Borges para a escolha das formas hexagonais para preencherem o espaço do universo se prende com o facto de os hexágonos serem formas necessárias de espaço absoluto. Os hexágonos da Biblioteca de Babel, que devem ser regulares pois são idênticos uns aos outros e tal só é possível se forem regulares, constituem uma economia de tempo e espaço (tal espaço lembra inevitavelmente as colmeias das abelhas). Repare-se que, geometricamente falando, só alguns polígonos como o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono preenchem totalmente o plano, sem deixar lacunas ou espaços vazios entre eles. Como refere Cláudio Salpeter, docente de Análise Matemática na Universidade de Buenos Aires, a soma dos ângulos internos de um hexágono é 720º, pelo que cada ângulo terá amplitude de 120º. E pensando que em cada vértice de um hexágono podemos contar três hexágonos, temos três ângulos de 120º que perfazem 360º, o que não deixa espaço para lacunas entre eles, ou seja o espaço fica totalmente preenchido.

Nas palavras de Borges, até agora referidas há um ponto que pode resultar em equívoco. Os livros, diferentes entre si, da Biblioteca de Babel são em número determinado e finito, ao contrário de infinito e indefinido tal como Borges refere.

Um livro da Biblioteca de Babel, escrito numa única frase, é uma frase com um número *“não infinito embora muito vasto”* de letras, número esse que se pode calcular se recordarmos que as páginas de um livro são 410, as linhas de uma página são 40, 80 são as letras de uma linha e o alfabeto são 25 letras. Note-se que Borges refere: *“o número de símbolos ortográficos é 25”* e na nota do editor consta: *“o manuscrito original não contém algarismos nem maiúsculas. A pontuação foi limitada à vírgula e* *ao ponto. Estes dois sinais, o espaço e as vinte e duas letras do alfabeto são os vinte e cinco símbolos suficientes…"*

Por cada letra temos 25 possibilidades, pelo que as frases de n letras são 25^n. Assim, uma página pode ser escrita como uma única frase de $40 \times 80 = 3200$ letras, temos então 25^{3200} páginas possíveis. E como um livro pode ser escrito com uma única frase de $3200 \times 410 = 1312000$ letras, então existem, ao todo, $25^{1312000}$ livros diferentes.

O narrador refere os "Purificadores" e acrescenta que a devastação causada por estes é inútil, uma vez que a biblioteca é tão grande que qualquer redução de origem humana é infinitesimal: *"Um: a Biblioteca é tão enorme que toda a redução de origem humana se torna infinitésima. Outro: cada exemplar é único, insubstituível, mas (como a Biblioteca é total) há sempre várias centenas de milhares de fac-símiles imperfeitos: de obras que só diferem por uma letra ou por uma vírgula. Contra a opinião geral, atrevo-me a supor que as consequências das depredações cometidas pelos purificadores foram exageradas pelo terror que esses fanáticos provocaram".* (Borges, 1941)

O "bibliotecário de Babel" procura o catálogo dos catálogos, mas tal livro não poderá existir, é um paradoxo da Matemática. Suponhamos que o conjunto A é o catálogo dos catálogos e A_1, A_2 e A_3 os catálogos existentes na Biblioteca. Simbolicamente temos A = $\{A_1, A_2, A_3\}$. Então, deparamo-nos com um catálogo que não está catalogado – o catálogo A. Devemos então construir um catálogo B, que incluísse A. Mas agora é o catálogo B que também não está catalogado… e assim indefinidamente. O narrador suplica, desesperadamente, que este livro total exista.

A história termina com a solução do narrador: *"Atrevo-me a insinuar esta solução do antigo problema: A biblioteca é ilimitada e periódica. Se um eterno viajante a atravessasse em qualquer direcção, verificaria ao cabo dos séculos que os mesmos volumes se repetem na mesma desordem (que, repetida, seria uma ordem: a Ordem). A minha solidão alegra-se com esta elegante esperança".* (Borges, 1941)

Portanto, o número de volumes é finito e o da galeria hexagonal não, porque os próprios volumes se repetem na mesma ordem periodicamente. Esta perioricidade que o "bibliotecário de Babel" caracteriza como ordem, indica uma lei a seguir, uma regra.

Na Biblioteca de Babel, há uma limitação do número de páginas, das linhas por página e das letras por cada linha de cada livro. Questionemo-nos então sobre quantos serão livros possíveis, na hipótese de que um possa conter um número *n* de letras, tão grande quanto se queira. Podemos concluir que o conjunto dos livros, de comprimento arbitrário, é numerável e será naturalmente constituído por livros sem qualquer sentido. Mas suponhamos que todos os livros possíveis, isto é, todas as palavras (ou frases, ou seja, os cordões de letras) possíveis têm um sentido. Deduzimos que todos os significados possíveis são infinitos, mas numeráveis, ou seja, só é possível uma infinidade numerável de pensamentos com um sentido preciso.

É esta a premissa ao "paradoxo de Richard", que passamos a expor nas palavras de Emile Borel, que parte da língua francesa, mas pode elaborar-se o mesmo raciocínio para qualquer outro idioma:

"O número das palavras da língua francesa é limitado, pelo que o número de frases de dez palavras também. Entre todas as frases possíveis obtidas, combinando de todas as maneiras possíveis dez palavras francesas, a maioria não tem qualquer sentido; entre as que o têm, apenas uma pequena parte define um número inteiro determinado. Há, portanto, um número limitado de números inteiros assim definidos, entre os quais existirá decerto um máximo". (Citado em Radice, 1981)

Borges tem razão ao afirmar que *"as combinações possíveis de vinte e cinco símbolos ortográficos"* são em *"número, embora muito vasto, não infinito"*. Mas não tem razão, quando afirma que essas combinações *"oferem tudo o que é dado exprimir, em todas as línguas"*. Para que esta segunda afirmação se tornasse verdadeira, necessitaríamos de uma Biblioteca bem maior que a Biblioteca de Babel, mesmo que admitíssemos nela livros de extensão arbitrária. Esta nova Biblioteca conteria a Biblioteca de Babel numa sua parte infinitesimal. Chamemos às duas bibliotecas, Biblioteca de Babel e Biblioteca de Cantor. Na segunda, $B = B_0$ constitui uma pequeníssima secção. No ex-líbris de B_0 apôs-se o símbolo L_0, porque os seus volumes são lidos atendendo rigorosamente aos significados que as palavras têm em L_0, linguagem inicial para a qual é suficiente o alfabeto inicial de 25 letras. Segue-se a secção B_1, cujos volumes são interpretados na linguagem L_1 e exibem na capa da estampilha L_1. Vêm depois as secções B_2, B_3, …, B_a, … transfinitamente. Se faltarem nos volumes as estampilhas indicativas da linguagem em que estão escritos, a bem ordenada Biblioteca de Cantor converte-se na caótica e cíclica Biblioteca de Babel.

Na última página Borges refere, em nota de rodapé, que Letizia Álvarez de Toledo teria observado que esta Biblioteca seria inútil. Bastaria um único livro, de formato comum, impresso em corpo nove, ou em corpo dez, que tivesse um número infinito de folhas infinitamente finas. Acrescentando em parênteses que, no século XVII, Cavalieri disse que todo o corpo sólido é a sobreposição de um número infinito de planos. E ainda que o manejo de tal livro não seria cómodo: cada folha desdobrar-se-ia noutras análogas e a inconcebível folha central não teria reverso.

7. Escher e o Infinito

7.1. A vida


Figura 7.1. *Retrato de Maurits Escher* (1963)

Maurits Cornelius Escher nasceu a 17 de Junho de 1898, na cidade holandesa de Leeuwarden, sendo o filho mais novo do Engenheiro G. A. Escher.

Aos 13 anos começou a frequentar uma Escola Secundária em Arnheim, para onde os seus pais se haviam mudado. Ele não era, de todo, um aluno brilhante. Para ele, a escola era um pesadelo. Foi duas vezes reprovado e também não conseguiu obter o diploma final, pois nem sequer em Arte teve bons resultados.

A obra que resta do seu tempo de escola mostra um grande talento, mas o trabalho prescrito para o exame: *Pássaro numa gaiola* não obteve aprovação do júri. Nessa altura já fazia lineo-gravuras juntamente com um amigo.

Acabado o Ensino Secundário, e por insistência da família, foi para Haarlem estudar Arquitectura na Escola de Arquitectura e Artes Decorativas. Mais uma vez, os resultados académicos eram fracos, e portanto, decidiu mudar para o curso de Artes Decorativas, onde conheceu o professor Samuel Jesserun de Mesquita que ensinava técnicas de gravura artística. Este professor, judeu de origem portuguesa, tornou-se fundamental no desenvolvimento artístico de Escher. Para além de lhe ensinar todos os pormenores na arte da gravura, incentivava-o a experimentar e a desenvolver todas as suas capacidades nessa arte.

Trabalhos desta época mostram que Escher depressa começou a dominar a técnica de xilogravura, mas mesmo neste curso não teve muito sucesso. Num relatório oficial da escola, assinado pelo director lia-se: *"... ele é demasiado pertinaz, demasiado literato-filosófico; a este jovem falta fantasia e ideias espontâneas, é demasiado pouco artista*."

Assim, Escher acabou por não concluir este curso e foi para Itália à procura de novas fontes de inspiração. O próprio Mesquita o aconselhou a seguir o seu caminho, pois Escher tinha adquirido uma boa base em desenho e dominava a xilogravura. No entanto, mantiveram-se em contacto até 1944, altura em que o professor, juntamente com a sua mulher e o filho, foi preso e assassinado pelos alemães.

Em 1922, Escher viajou durante duas semanas com dois amigos holandeses pela Itália. O interesse que o país lhe despertou foi tal que fixou lá residência. Neste país muitos eram os elementos que o entusiasmavam, entre outros, apreciou as 17 torres em San Gimignamo e em Siena ficava impressionado com as paisagens. Foi em Siena que tiveram origem as primeiras xilogravuras de paisagens italianas.

Ainda em 1922 viaja por Espanha, visitando pela primeira vez a cidade de Granada e o seu emblemático palácio, o Alhambra. Escher ficou deliciado com a decoração interior deste palácio, de influência persa e muçulmana, e tornou-se fonte de inspiração para obras futuras, especialmente as que versam sobre o tema das pavimentações do plano.

Depois de uma curta estadia em Espanha, regressou a Itália, instalando-se numa pensão em Siena, onde conheceu Jetta Umiker, com quem casou em 1924. Ela passou a acompanhar o artista nas suas viagens e na elaboração dos registos dos pontos de interesse. Para suportar a despesa destas viagens, vendia alguns dos seus trabalhos.

Foi nesta cidade que realizou a sua primeira exposição individual, em 1923. No ano seguinte realizou a sua primeira exposição em Holanda.

O pai de Jetta era suíço e até à eclosão da revolução russa foi director de uma fábrica, nas proximidades de Moscovo. Jetta, tal como a mãe, desenhava e pintava, embora nenhuma delas tivesse qualquer preparação para isso.

Os pais de Jetta fixaram-se em Roma e o casal foi viver com eles.

Em 1932 e 1933 foram publicados dois livros com ilustrações de Escher, respectivamente, *XXIV Emblemata* e *De Vreeslijke avonturen van Scholastica*.

Em 1934, Escher concorre com a litografia *Nonza* numa exposição em Chicago e recebe o terceiro prémio.

O casal viveu em Itália até 1935 e durante esse período tiveram dois filhos, George e Arthur, mas nesse ano, devido às políticas fascistas, mudam-se para Chateaux-d'Oex na Suíça. A estadia foi curta, pois a paisagem monótona da Suíça não o inspirava. E portanto, decidiu viajar durante três meses com a sua esposa por Itália, França e Espanha. Nesta viagem, visita pela segunda vez Alhambra e esta visita altera o seu trabalho profundamente. Ele copiava muitos motivos juntamente com a sua mulher. Aqui foi lançado o fundamento para a sua obra revolucionária no âmbito da divisão regular da superfície.

Entretanto, em 1937, Escher e sua família mudam-se para a Bélgica, instalando-se em Ukkel, perto de Bruxelas, onde nasceu o seu terceiro filho, Jan.

Em 1939 faleceu o seu pai e no ano seguinte a sua mãe.

Como a guerra estava prestes a rebentar na Bélgica, Escher queria estar perto da sua pátria. Quando começou, viver na Bélgica tornou-se psicologicamente muito difícil para um holandês, e portanto, em 1941, regressa ao seu país natal, após a invasão da Bélgica pelos alemães e hospeda-se com a sua família em Baarn. Escolheram Baarn, porque a Escola Secundária local tinha um bom nome.

Em 1954 realiza-se uma importante exposição no museu Stedelijk em Amesterdão e expõe igualmente em Washington.

Em 1958 publica um texto sobre a divisão regular do plano - *Regelmatig Vlakverdeling*.

Em 1959 surge um outro, produto sobre a sua obra gráfica, *Gragick en Tekeningen M. C. Escher.*

Em 1962 adoeceu e foi submetido a uma grave operação. O seu trabalho ficou parado por um tempo, pois a sua recuperação foi demorada. Em 1964 foi submetido a outra cirurgia.

Em 1968 realiza-se, para celebrar o seu septagésimo aniversário, uma exposição retrospectiva da sua obra em The Hague.

Em 1969, Escher realizou a sua última obra, *Serpentes*, que mostrava que a sua perícia nada havia diminuído.

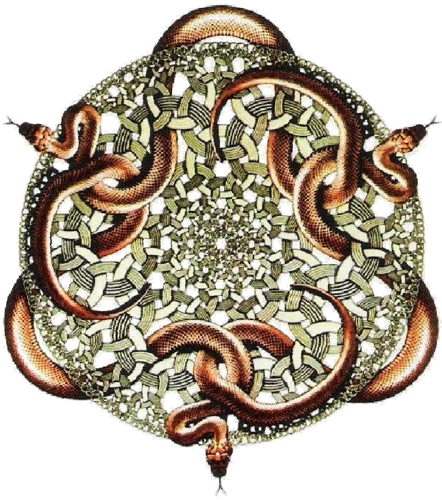


Figura 7.2. *Serpentes* (Escher, 1969)

Em 1970 mudou-se para a Casa-de-Rosa-Spier em Laren, no norte de Holanda – uma casa onde os artistas idosos podiam ter os seus próprios estúdios e serem cuidados. Faleceu a 27 de Março de 1972 no hospital em Hilversun com 73 anos.

Escher trabalhou sempre sozinho, sem colegas nem escolas. Porém, manteve amizades durante toda a sua vida, com quem trocava visitas e correspondência regularmente. Ele, apesar de acreditar que alguns artistas não passavam de impostores, tinha muito prazer em cultivar a tertúlia e a conversa.

Escher não se considerava um artista plástico nem um matemático, mas o interesse com que os matemáticos e cientistas recebiam a sua obra davam-lhe uma grande satisfação. Ele sentia-se compreendido quando falava e sentia que as suas gravuras eram percebidas. Contudo, Escher não terá chegado a aperceber-se que muitos matemáticos trabalhavam e combatiam com os mesmos conceitos que o preocupavam.

7.2. A obra

De acordo com Ernst (1978), a obra de Escher pode ser dividida em quatro períodos diferentes, distinguidos por uma cronologia, que se podem conjugar em duas fases, antes e depois de 1937 (ano em que se fixou em Ukkel).De acordo com as palavras de Escher (1959):

"A razão porque, a partir de 1938, me concentrei cada vez mais intensamente com a transmissão de ideias pessoais, foi o resultado, em primeira linha, da minha partida em Itália. Na suíça, na Bélgica e na Holanda, onde sucessivamente me detive, o aspecto exterior da paisagem e da arquitectura sensibilizaram-me menos do que havia sido o caso, sobretudo no sul de Itália. Forçado pelas circunstâncias, tive de me afastar duma reprodução mais ou menos directa e exacta do ambiente à minha volta. Esta circunstância estimulou, sem dúvida, em grande medida, a criação de imagens interiores".

A primeira fase é dominada pela representação da realidade visível. A maioria das suas gravuras eram paisagens e cidades do sul de Itália. Retratou ainda alguns animais, plantas, pessoas, …

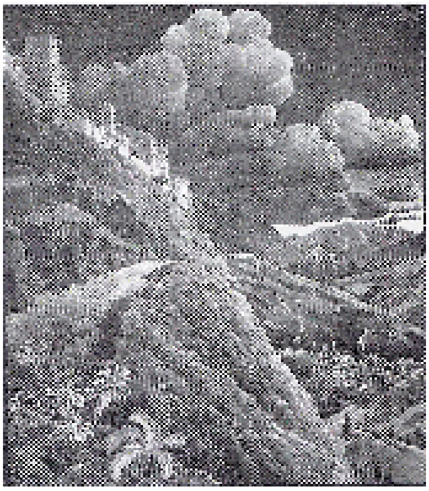


Figura 7.3. *Castrovalva* (Escher, 1930)

Nesta fase evidencia-se um realismo agudo que é bem visível na importância que dava a vários detalhes, mas ao mesmo tempo uma visão muito própria e detalhada para captar a realidade.

Os seus trabalhos apresentam, muitas vezes, diferentes sensações do espaço, pois Escher tinha uma obsessão pela escolha de ângulos de visão.

Escher fez também, nesta altura, produtos da sua própria imaginação, por exemplo, *Castelo no ar* e *Torre de Babel*.

A partir de 1937, o real deixa de ser o centro da sua obra para passar a ser um ornamento, fixando-se nas construções da sua imaginação. Pretendia dar vida aos padrões que encontrava nos mosaicos islâmicos e nas formações cristalinas, substituindo formas abstractas por elementos reais (pessoas, animais, plantas). Escher combinava esses elementos de várias formas, sugerindo processos que se poderiam repercutir até ao infinito. A animação destes padrões, em que as estruturas adquirem individualidade e se transformam sucessivamente umas nas outras, leva à série *Metamorfoses*.

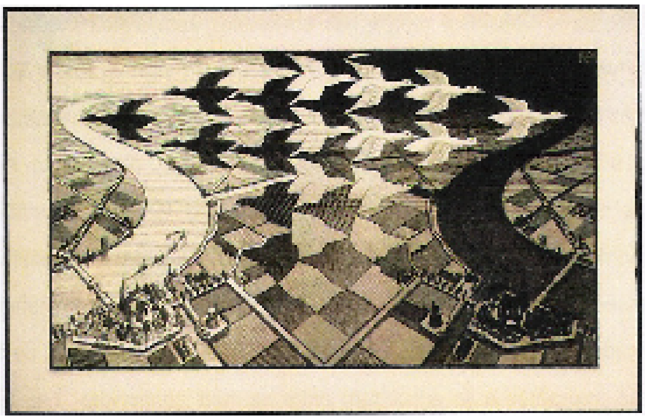


Figura 7.4. *Dia e noite* (Escher, 1938)

Em 1946, Escher interessa-se novamente por construções espaciais. Aqui não era tanto a própria representação que interessava, mas, pelo contrário, a particularidade da perspectiva. A este período Ernst (1991) designou por *subordinação à perspectiva*. Neste período de experimentação leva-o a imagens bidimensionais que representavam figuras tridimensionais, mas que não se poderiam construir em tal dimensão, chamadas *figuras impossíveis*.

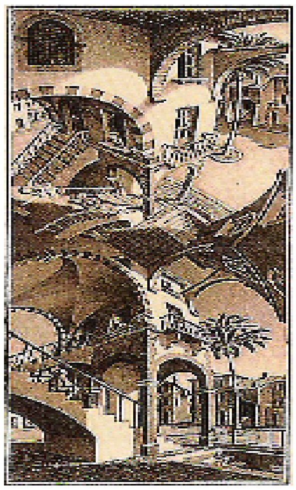


Figura 7.5. *Em cima e em baixo* (Escher, 1947)

Figura 7.6. *Limite Circular III* (Escher, 1959)

O último período, que se iniciou em 1956, foi designado por *aproximação ao infinito*. Neste período, Escher tinha uma grande obsessão em representar o infinito numa superfície limitada. Esta preocupação esteve presente em toda a sua obra, mas é depois de 1937 que essa preocupação se torna mais nitidamente objectivo de uma procura sistemática.

De seguida, é apresentado um quadro síntese com a classificação da obra de Escher segundo Ernst:

Fase	Data	Período	Exemplo
1.ª fase	1922-1937	Paisagens	*Castrovalva* (1930)
2.ª fase	1937-1945	Metamorfoses	*Dia e noite* (1938)
	1946-1956	Gravuras subordinadas à perspectiva	*Em cima e em baixo* (1947)
	1956-1970	Aproximação ao infinito	*Limite circular III* (1959)

Na sua obra está presente um conceito de realidade plural em movimento como o cubismo, o construtivismo ou o surrealismo. A linguagem visual de Escher era realista e acessível a todos. Por outro lado, a obra de Escher pode ser classificada como estruturalista, pois a estrutura era tomada como modelo para o potencial de realizações que sugere.

As obras de Escher primeiramente eram apreciadas por matemáticos, cristalógrafos e físicos e só depois começou a interessar o público em geral.

Os seus objectivos eram muito diferentes dos seus contemporâneos, e portanto, era difícil enquadrar a sua obra no panorama das artes plásticas contemporâneas. Ele próprio ficava confuso quanto ao lugar que ocupavam nesse mundo, afirmando: "*Acho que aquilo que faço é umas vezes muito bonito, outras vezes muito feio*". (Citado por Ernst, 1991)

7.3. Escher e a Matemática

Escher esteve em contacto próximo com matemáticos (por exemplos R. Penrose e H. Coxeter) e cientistas (por exemplo, Loeb e C. MacGillavry) e este contacto teve grande importância na sua obra.

Desde a Antiguidade que a Matemática e a Arte surgem associadas. O mundo da Matemática e o mundo da Arte estão intrinsecamente relacionados e Escher descobriu essa relação:

"*Todas as reproduções foram produzidas com a intenção de esclarecer uma determinada linha de pensamento. As ideias que lhe estão por base testemunham, na maior parte, o meu espanto e admiração em face das leis da natureza que operam no mundo à nossa volta. Aquele que se maravilha com alguma coisa tem ele mesmo a consciência da maravilha. Olhando de olhos abertos os enigmas que nos rodeiam e ponderando e analisando as minhas observações entro em contacto com o domínio da Matemática. Embora não tenha qualquer formação e conhecimento das ciências exactas, sinto-me frequentemente mais ligado aos matemáticos do que aos meus próprios colegas de profissão*". (Escher, 1959)

Um dos principais elementos matemáticos presentes na obra de Escher é a representação do espaço. Ele conseguia misturar vários tipos de espaço numa mesma imagem. Em algumas imagens pode-se verificar uma representação tridimensional se nos centrarmos em determinadas parcelas, mas por outro lado se nos centrarmos noutras evidencia-se uma figura bidimensional.

Escher decidiu explorar em profundidade as leis da perspectiva. Ele representava a duas dimensões figuras tridimensionais que não eram possíveis de construir a três dimensões, são as chamadas *figuras impossíveis*.

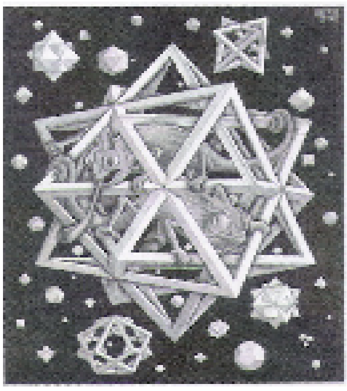


Figura 7.7. *Estrelas* (Escher, 1948)

Outro elemento matemático presente na sua obra é a representação de sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Escher fez em madeira e acrílico alguns destes sólidos regulares.

Como foi demonstrado pela Matemática, os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos são as únicas formas usadas como padrão, pois só com estes três polígonos é possível realizar divisões regulares no plano. Mas ao observar as imagens de Escher, aparentemente parece que ele não usava qualquer um destes polígonos. Se estudarmos as suas imagens reparamos que Escher pega num quadrado, num triângulo equilátero ou num hexágono e transforma-os em objectos com a mesma área. Desta forma, consegue transformar as suas imagens mais apelativas do que se usasse simplesmente um dos três polígonos.

Outra importante ligação, entre a obra de Escher e a Matemática, surge nos estudos das pavimentações bidimensionais, onde a sua obra representa uma antecipação de uma teoria matemática complexa.

Escher realizou pavimentações com dois, três e quatro pares distintos de figuras congruentes. No início começou por utilizar simetrias simples. Mais tarde, utiliza duas classes de figuras nas pavimentações, em que todas as figuras de cada classe são mutuamente equivalentes por simetrias da pavimentação. Por fim, substitui o plano euclidiano pela esfera e pelo plano hiperbólico, sendo estas pavimentações o melhor exemplo da relação, na obra de Escher, entre a Arte e a Matemática.

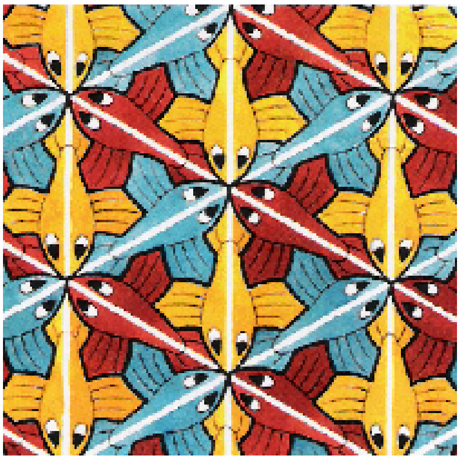


Figura 7.8. *Trabalho de simetria n.º 123* (Escher, 1964)

7.4. Escher e a busca do Infinito

Segundo Ernst, o último período da obra de Escher pode ser caracterizado como uma *aproximação ao infinito*. Mas não descuremos que o infinito é um tema recorrente na sua obra.

Em 1959, Escher expressou o que o moveu a representar o infinito:

"Não podemos imaginar que algures por detrás da estrela mais longínqua do céu nocturno, o espaço possa ter um fim, um limite para além do qual nada mais existe. O conceito de vácuo diz-nos ainda alguma coisa, pois um espaço pode estar vazio, de

qualquer maneira na nossa fantasia, mas a nossa força de imaginação é incapaz de aprender o conceito de nada no sentido de ausência de espaço. Por isso nos agarramos a uma quimera, a um além, a um purgatório, a um céu e a um inferno, a uma ressurreição ou uma nirvana que de novo têm de ser eternos no tempo e infinitos no espaço, e isto, desde que o homem na Terra se deita, senta ou levanta, desde que nela se arrasta e corre; navega, cavalga e voa (e da Terra para fora se projecta)".

De acordo com Maor (1991), o trabalho realizado por Escher sobre o infinito pode ser dividido em três tipos: *ciclos sem fim*, *preenchimento de superfícies* e *limites*.

Por um ciclo entende-se um fenómeno que, por deslocações para cima ou para baixo através dos níveis de um sistema hierárquico qualquer, voltamos sempre ao ponto de partida. Pode-se então verificar que implícito a este conceito de ciclo está a noção de infinito potencial, pois um ciclo representa um processo que não termina.

As gravuras que melhor ilustram os *ciclos sem fim* são as que representam figuras impossíveis. Como exemplos típicos temos as gravuras: *Queda de água* (1961) e *Subindo e descendo* (1960).

Segundo Escher na gravura "*Queda de água: a água duma cascata põe em movimento a roda de um moinho e corre depois para baixo, numa calha inclinada entre duas torres, devagar, em ziguezague, até ao ponto em que a queda d' água de novo começa"* (Escher, 1959). Nesta gravura, a água sobe ou desce sempre e sem perder a força.

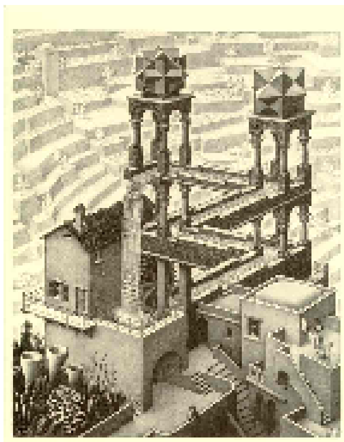


Figura 7.9. *Queda de Água* (Escher, 1961)

Na gravura *Subindo e descendo*, alguns monges estão sempre a descer enquanto outros continuam a subir. Se ao tentarmos percorrer estas figuras, sentimos a necessidade de continuar sem parar indefinidamente.

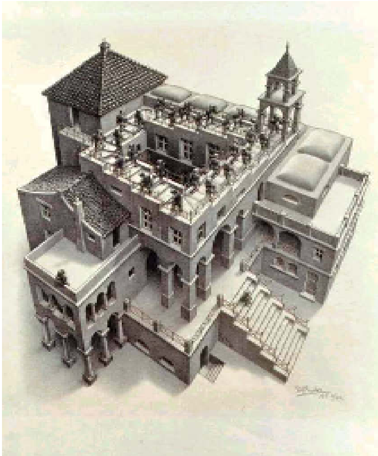


Figura 7.10. ***Subindo e descendo*** (Escher, 1960)

Para além das figuras impossíveis, podemos encontrar outro tipo de ciclos que são os relacionados com estruturas de superfície, ocorrendo um conflito entre duas e três dimensões, por exemplo, as gravuras *Mãos desenhando-se* (1948) e *Répteis* (1943).

Na primeira gravura, o ciclo é formado pelas mãos, em que parte de cada mão está representada a três dimensões e o resto faz parte de um desenho numa folha de papel, que, por sua vez, se encontra representado a três dimensões com a ajuda de uma dobra num dos cantos.

Figura 7.11. ***Mãos Desenhando-se*** (Escher, 1948)

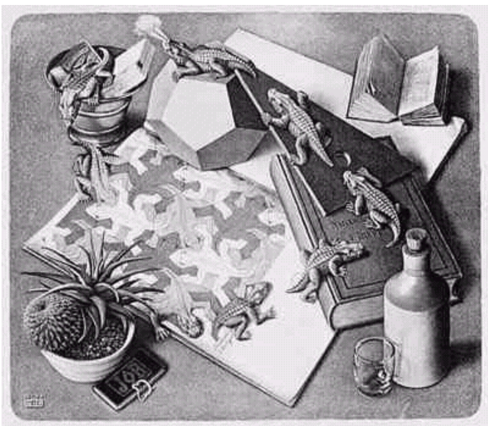


Figura 7.12. ***Répteis*** (Escher, 1943)

Na gravura *Répteis*, os répteis, a certa altura, entram numa folha de um caderno, que, através de translações e rotações, a preenchem completamente, voltando a sair e a recomeçar de novo todo o percurso.

O segundo tipo de representação do infinito é o *preenchimento de superfícies* que pelo seu carácter sistemático sugere um processo ilimitado. Esta representação do infinito surge nas suas experiências de divisão regular do plano. Para Escher a divisão regular da superfície "*é a fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi*". (Escher, 1959)

Nos seus trabalhos referentes ao *preenchimento de superfícies*, ele baseava-se nas pavimentações do plano, alargando-as ao espaço. Algumas destas pavimentações foram concretizadas fisicamente na forma de esferas, em materiais como a madeira ou o marfim, mostrando o ilimitado num espaço finito (exemplo, *Esfera com peixes*, 1940).

No entanto, a divisão regular do plano não preenchia completamente a sua aproximação ao infinito. De acordo com Escher, "*um plano, que podemos imaginar estendendo-se sem fronteiras em todas as direcções, pode ser preenchido ou dividido até ao infinito, de acordo com um número limitado de sistemas, em figuras geométricas similares, contíguas, sem deixar qualquer espaço livre*". (Escher, 1958)

Mais tarde, acaba por reconhecer que a divisão regular da superfície é apenas um pequeno fragmento do infinito, pois apenas somos capazes de imaginar uma superfície plana que se estenda ao infinito, daí não se tratar de um processo acabado, mas ao invés, que não termina, associado ao infinito potencial. Segundo Escher: "*o mesmo formato em todas as componentes não permite mais do que a representação dum fragmento duma divisão regular da superfície. Quem quiser representar um número infinito, tem de reduzir gradualmente o tamanho das figuras até ao alcance, pelo menos teoricamente, o limite do infinitamente pequeno*". (Escher, 1959)

Relativamente aos *limites*, Escher começa por considerar para além das translações isométricas, as semelhanças, utilizando motivos idênticos, sucessivamente mais pequenos, para preencher o plano até ao limite permitido pela sua visão auxiliada por uma lupa. Para isso, Escher segue uma progressão geométrica.

Um bom exemplo da utilização de uma progressão geométrica é a gravura *Cada vez mais pequeno* (1956). Esta gravura surgiu na tentativa de representar o infinito como uma totalidade, em que as figuras são reduzidas radialmente das margens para o centro, mas esta configuração ainda permanece fragmentária, porque pode ser expandida pela junção de figuras maiores.

Escher escreveu: "*Cada vez mais pequeno é uma primeira tentativa nessa direcção. As figuras com as quais esta gravura é construída reduzem a área da sua superfície para metade constantemente e radialmente dos lados para o centro, onde o limite do infinitamente muito e do infinitamente pequeno é obtido num único ponto. Mas esta configuração também permanece fragmentária, porque a sua fronteira pode ser expandida tão longe quanto se queira pela junção de figuras cada vez maiores*". (Escher, 1959)

Figura 7.13. *Cada vez mais pequeno* (Escher, 1956)

Mais tarde, criou quatro xilogravuras e a essa série chamou *Limites Circulares*. A primeira destas obras, *Limite Circular I*, concretizada em 1958, não o satisfez plenamente. Para Escher a melhor realização do seu objectivo foi a xilogravura *Limite Circular III*, realizada em 1959.

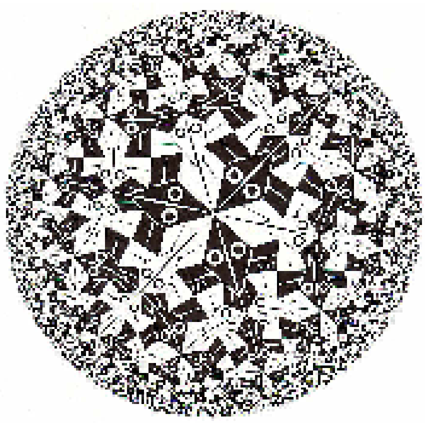


Figura 7.14. *Limite Circular I* (Escher, 1958)

Recorrendo às palavras de Escher:

"A única forma de (...) estabelecer em infinito na sua inteireza dentro de uma fronteira lógica é usar a aproximação inversa à adoptada em Cada vez mais pequeno.

A primeira, ainda desajeitada, aplicação deste método é ilustrada em Limite Circular I (1958). As figuras de animais maiores estão colocadas no centro e o limite do infinitamente muito e infinitamente pequeno é encontrado no limite circular. O esqueleto desta configuração, à parte das três linhas rectas que passam pelo centro, consiste inteiramente em arcos com raio cada vez mais pequeno à medida que se aproximam da fronteira. Adicionalmente todos eles se intersectam em ângulos rectos.

A gravura Limite Circular I, tendo sido a primeira, exibe muitas deficiências. Quer a forma peixe, ainda muito próxima das abstracções lineares, quer o seu arranjo e atitude a respeito uns dos outros, deixam muito a desejar.

Acentuadas pelas suas espinhas centrais, séries de peixes podem ser reconhecidas em pares alternados: brancas onde as cabeças se encontram, pretas onde se cruzam as caudas. Não existe continuidade, direcção única, unidade de cor em cada fila.

Na gravura colorida Limite Circular III (1959) a maior parte destas deficiências foram eliminadas. Agora existem apenas séries de peixes que se movem na mesma direcção: todos os peixes da mesma série têm a mesma côr e rodam uns após os outros, cabeça com cauda, ao longo de um curso circular de fronteira a fronteira. Quanto mais se aproximam do centro maiores se tornam. Quatro cores foram necessárias de forma que cada série completa contratasse com as que o rodeiam". (Escher, 1959)

Posteriormente, numa tentativa de aperfeiçoar o seu trabalho, realiza a xilogravura *Limite Quadrado*, em 1964, a propósito da qual escreveu:

"Depois da satisfação relativa do meu anseio por um símbolo perfeito do infinito (no melhor realizado em Limite Circular III) tentei compor uma forma quadrada em vez de círculo (...) Um tanto orgulhoso pela minha descoberta enviei uma prova ao professor Coxeter". (Citado por Ernst, 1991)

Figura 7.15. *Limite Quadrado* (Escher, 1964)

Mas, numa carta escrita a Coxeter apercebe-se que a complexidade de concepção de suas gravuras, sugerindo um infinito actual está nitidamente presente nas suas pavimentações não euclidianas, isto é, nos *Limites Circulares* e não num *Limite Quadrado*, já euclidiano.

8. Estudo sobre as concepções de Infinito

Neste estudo pretende-se analisar as concepções que os alunos possuem sobre o infinito. Para tal, elaborou-se um questionário que foi aplicado a uma turma do 8º ano (com 25 alunos) da escola onde estamos a estagiar (Escola Básica 2 e 3 de Vila Verde).

Questionário

Com o intuito de analisar as concepções que os alunos possuem sobre o infinito procedeu-se à elaboração de um questionário sobre o tema, que se encontra em anexo.

O questionário é composto por quatro questões abordando diversos temas relacionados com o infinito.

A primeira questão é de resposta aberta, exigindo a interpretação de um excerto do texto *Parliamo tanto di me* (Cap. XVI) de César Zavattini sobre uma competição Matemática.

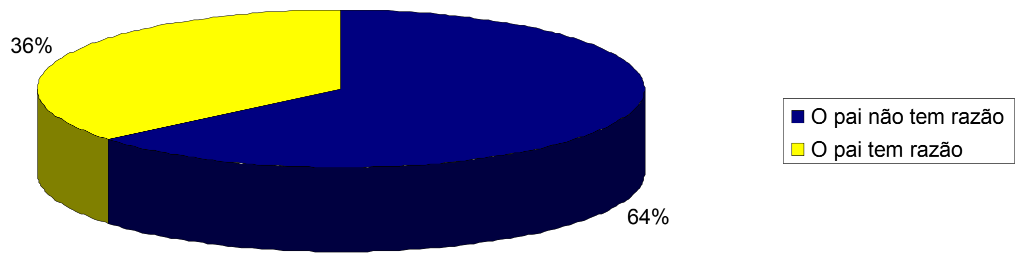
A segunda pergunta pretende analisar as ideias que os alunos têm sobre o infinito e como tal é uma questão aberta. Já a terceira é de carácter dicotómico, podendo ser atribuídos os valores verdadeiro ou falso.

Por fim, na última questão os alunos apenas tinham de responder quantos elementos possuía cada conjunto, logo também é fechada.

Questão 1

Relativamente às duas primeiras perguntas da questão 1, a maioria dos alunos (64%) respondeu acertadamente, ou seja, conseguiu perceber que o pai não tinha razão, isto é, para ganhar não bastaria ter dito mais dois.

Percentagem de respostas dadas à primeira parte da questão 1



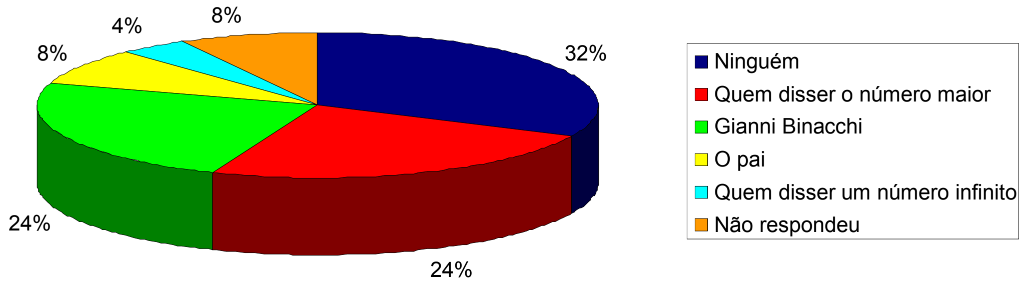
Quanto à outra parte da questão 1, sobre quem poderia ganhar o concurso, obteve 56% de respostas "ninguém" e "quem disser o número maior", apresentando a primeira uma percentagem superior (32%). Alguns alunos (24%) responderam que quem ganharia o concurso era o Gianni Binacchi e houve ainda alunos (8%) que responderam que ganharia o pai, isto é, para ganhar o concurso bastaria ter dito mais dois, o que traduz uma ausência de noção de infinito.

É de salientar também que um aluno respondeu que "ganha o concurso quem disser um número infinito".

Por fim, é necessário referir que 8% dos alunos não responderam a esta parte da questão 1.

O gráfico resume os dados obtidos nesta questão, categorizando as respostas em cinco hipóteses: "ninguém", "quem disser o número maior", "Gianni Binacchi", "o pai" e "quem disser infinito".

Percentagem de respostas dadas à segunda parte da questão 1



Para quem respondeu acertadamente que ninguém poderia ganhar o concurso, ocorreram vários tipos de respostas, podendo ser categorizadas pela sua justificação:

- Os números são infinitos

"Não ganharia ninguém, porque existe um número infinito de números."

"Não, porque podia vir outra pessoa e dizia mais três e assim sucessivamente e como os números são infinitos nunca ninguém iria ganhar."

- O concurso é infinito

"Ninguém poderia ganhar, porque este concurso não tem fim, é infinito."

Para quem considerou que o concurso era válido e que o ganharia quem dissesse o número maior (24%), há que salientar que, destes, cerca de 33% responderam que ganharia o último a responder.

Vejamos alguns exemplos destes dois tipos de resposta:

- Ganha quem disser o número maior

“Quem poderá ganhar este concurso é o que disser o número maior de todos.”

- Ganha o último a pronunciar-se

“Na minha opinião ganha o que respondesse em último.”

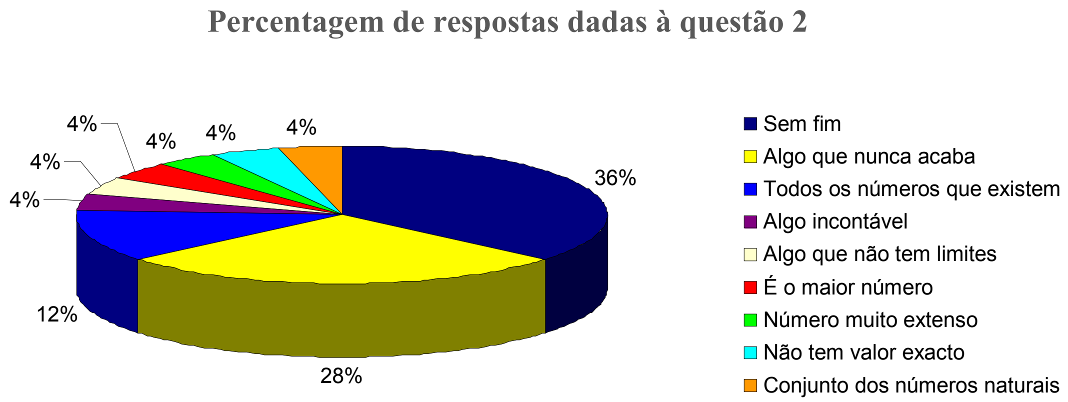
Questão 2

O leque de ideias que os alunos associam ao infinito é muito variado, tendo sido contabilizadas nove designações diferentes. A mais referida é “sem fim”, representando 64% do total de respostas dadas.

Pela análise da lista de ideias associadas ao infinito, há algumas que iremos analisar com mais pormenor. Por exemplo, os alunos associam “os números” ao infinito, o que é facilmente compreensível, já que no 8.º ano de escolaridade, eles sabem que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são infinitos. Também o termo “incontável” se associa a esta ideia de contagem que não termina, podendo ser associada à noção que os conjuntos numéricos já mencionados são infinitos.

Seguindo esta linha de pensamento, a expressão “algo que não tem limites” está associada a algo que não termina.

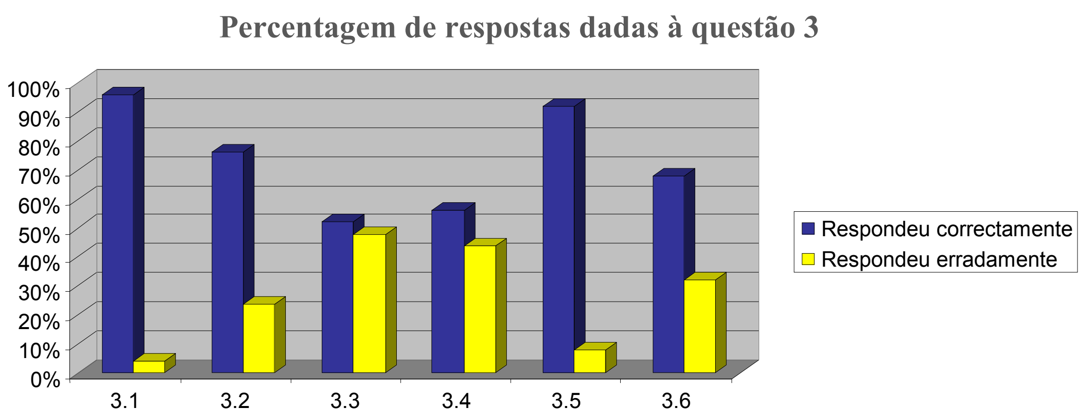
O gráfico resume os dados obtidos nesta questão:



Questão 3

Relativamente a esta questão, de um modo geral, os alunos responderam acertadamente.

O gráfico apresenta as percentagens de respostas dadas pelos alunos às questões 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6.



Pela análise do gráfico, verifica-se que em todas as alíneas desta questão a percentagem de respostas correctas é superior a 50%.

A única questão em que a percentagem de respostas correctas foi muito próxima da percentagem de respostas erradas foi a 3.3, que se referia às dízimas infinitas periódicas. Todas as outras obtiveram valores consideravelmente altos.

Questão 4

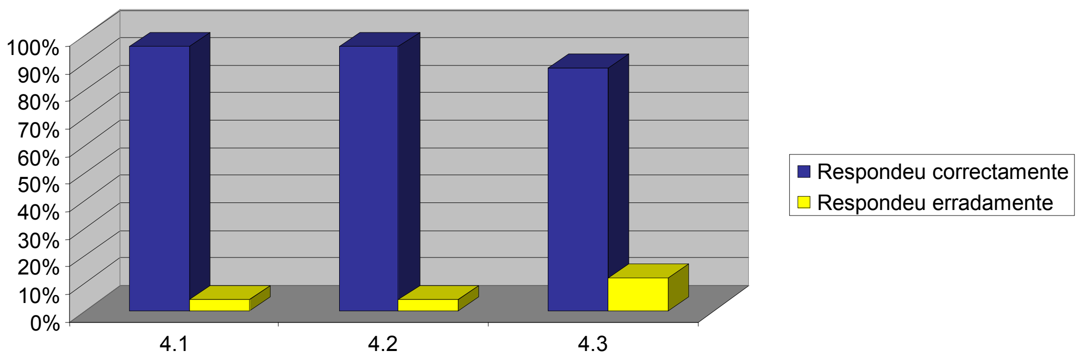
A questão 4 é constituída por três alíneas e refere-se ao número de elementos que um conjunto possui.

A percentagem de respostas correctas é a mesma (96%) nas duas primeiras questões que se referem a conjuntos finitos.

Quanto à última questão há um pequeno decréscimo, no entanto, a percentagem de respostas correctas contínua muito elevada (88%).

O gráfico apresenta as percentagens de respostas dadas pelos alunos às questões 4.1, 4.2 e 4.3.

Percentagem de respostas dadas à questão 4



Questão 4.1

A primeira das três alíneas da questão 4. referia-se ao cardinal do conjunto vazio, tendo os alunos respondido zero elementos em 96% dos casos. É de salientar que apenas um aluno respondeu erradamente a esta questão, tendo afirmado que o conjunto possuía infinitos elementos.

Questão 4.2.

A esta alínea, 96% dos estudantes responderam que o conjunto $\{-1,2,5,8\}$ era formado por quarto elementos e mais uma vez houve um aluno que considerou que o conjunto era infinito.

Questão 4.3.

Agora decidimos analisar o tipo de respostas que os alunos dariam quanto ao número de elementos de um conjunto infinito. Pois bem, obteve-se três tipos de respostas: "infinito", "finito" e "cinco".

Considerar que o conjunto com reticências é infinito foi o mais comum (88%). No entanto, é de salientar que um aluno respondeu que o conjunto é finito e dois alunos afirmaram que o número de elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5,...\}$ é cinco.

Conclusão

Historicamente, os filósofos distinguiram dois tipos de infinito: infinito potencial e infinito actual.

A filosofia de Aristóteles e a sua expressão nos *Elementos* de Euclides condicionaram as concepções de infinito até ao século XIX. A ideia de infinito actual arrastava consigo contradições para as quais, até meados do século, não se encontrava solução; assim, o infinito só era aceite na sua forma potencial, sendo entendido como um modo de pensar e não como um objecto matemático.

A partir de 1869, os trabalhos de Georg Cantor, iriam provocar grandes mudanças no que diz respeito às concepções de infinito.

Já na actualidade, o infinito actual é aceite pela maioria dos matemáticos.

A história do infinito sempre foi controversa, gerando vários conflitos ao longo dos séculos. Desde o tempo da Grécia Antiga que este tema gerou confusão com as nossas intuições.

Com o intuito de entender mais profundamente as concepções de infinito dos alunos, realizou-se um questionário sobre o assunto em alunos de uma turma do 8.º ano de escolaridade.

No entanto, reconhecemos que a amostra de alunos com que trabalhamos está longe de ser representativa da realidade. Tratou-se de uma amostra por conveniência, pois por incompatibilidade de horário, testes e trabalhos dos alunos, foi esta a organização possível. Logo o tamanho reduzido e a natureza circunstancial da amostra não legitima generalizações.

No que diz respeito às concepções acerca do infinito, as conclusões a que chegámos são essencialmente coincidentes com as da generalidade dos estudos que se debruçaram sobre esta problemática (em particular, Rock (1991), Tall (1981) e Tirosh (1994)). Não se afastam, igualmente, das apresentadas em Rodrigues (1994) num estudo envolvendo alunos de cursos de formação de professores de Matemática no ano terminal de curso.

De um modo geral os alunos admitem a ideia de um infinito em potência, mas não em acto, e, quando não rejeitam totalmente a sua possibilidade, tendem a transpor para esse território os métodos de comparação e medida que lhes são familiares do caso finito.

Enfim, intuitivamente, a palavra *infinito* tem um, ou vários, significados para cada um de nós.

Desde sempre essa noção preocupa os homens. A partir da observação das estrelas, o decorrer do tempo, as experiências religiosas (crença na vida eterna), o homem tem-se questionado sobre algo maior do que a sua mente pode conceber e que ultrapassa os horizontes temporal e espacialmente limitados da sua existência.

A noção do ilimitado, do eterno, do que não acaba, do que está sempre para além do concebível, em suma, do infinito, faz parte das nossas experiências mais profundas. Ao longo dos tempos, pintores, escultores e poetas têm procurado traduzi-la na expressão artística.

Na pintura encontramo-la, por exemplo, na representação do horizonte em perspectiva, a partir do Renascimento, nas construções do Surrealismo nos princípios do século XX e constitui, como vimos, uma preocupação constante na obra de M. C. Escher.

Na literatura, os exemplos abundam. Fiquemos apenas com o final de um soneto de Vinicius de Moraes onde se joga com as palavras imortal e infinito:

Eu possa me dizer do amor (que tive):

Que não seja imortal, posto que é chama

Mas que seja infinito enquanto dure.

Ou de Alexandre O'neill,

O infinito? Diz-lhe que entre.

Faz bem ao infinito entre gente.

De facto, tal como na literatura e na expressão plástica, a representação do infinito em Matemática é um tópico apaixonante e igualmente belo. Porque, mesmo quando não parece fácil apercebermo-nos disso, a Matemática também trabalha com ideias.

Bibliografia

- Borges, Jorge Luís (1941). *Ficções.* Porto: Colecção Mil Folhas.
- Boyer, Carl B. (1993). *História da Matemática.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda.
- Caraça, Bento J. (1978). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa.
- Devlin, Keith (1994). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora
- Estrada, M. F. e outros (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.
- Eves, Howard (1997). *Introdução à história da Matemática.* 2ª edição. Campinas: Editora da Unicamp.
- Gödel, Kurt. (1979). *O teorema de Gödel e a hipótese do contínuo.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Guillen, Michael. (1987). *Pontes para o infinito. O lado humano das matemáticas.* Lisboa: Gradiva.
- Martinho, Maria H. S. S. (1996). *O infinito através da obra de M. C. Escher.* Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática, área de especialização em Ensino. Universidade do Minho.
- Pinto, José J. M. S. (2000). *Métodos infinitesimais de análise matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Rodrigues, Marina V. V. F. (1994). *O conceito de infinito em futuros professores de Matemática.* Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Ciências de Educação, especialidade de Supervisão. Universidade de Aveiro.
- Sampaio, Patrícia A. S. R. (2006). *Concepções de infinito dos alunos do ensino secundário: contributo da webquest Escher e a procura do infinito.* Tese de mestrado em Educação. Universidade do Minho.
- Stewart, Ian (1996). *Os problemas da matemática.* Liboa: Gradiva.

- Struik, Dirk J. (1997). *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

- Viegas, Maria T. V. M. (1996). *Infinito e dimensão: uma revolução no século XIX*. Dissertação de mestrado em Ensino de Matemática. Universidade do Porto.

- Waldegg, G. (1991). The *conceptual evolution of actual mathematical infinity*, Educacional Studies in Mathematics, 22.

Anexos

Escola B 2/3 de Vila Verde – 345430

Questionário sobre o conceito de Infinito

1. Lê com atenção o excerto do texto *Parliamo tanto di me* (cap.XVI) de César Zavattini sobre uma competição Matemática, à qual quem ganha é quem pronunciar o número mais elevado.

Meu pai e eu chegamos à Academia quando o presidente Maust iniciava a chamada dos participantes na prova mundial de matemática.

- Um, dois, três, quatro, cinco, …

Na sala ouvia-se apenas a voz dos concorrentes. (…) Às vinte e duas exactas, registou-se o primeiro golpe de teatro: o algebrista Pull concluiu:

- Um bilião.

(…) Explodiram aplausos na sala, imediatamente secundados pelo presidente. Meu pai olhou em volta com superioridade (…) e principiou:

- Um bilião de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões…

A multidão delirava:

- Viva, viva…

- … de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões…

(…) A sua voz atenuou-se a pouco e pouco e o último sopro de *biliões* brotou-lhe dos lábios como um suspiro, após o que se deixou cair na cadeira, exausto. O príncipe Otão aproximou-se, e preparava-se para lhe colocar a medalha no peito, quando Gianni Binacchi bradou:

- Mais um!

A multidão precipitou-se no hemiciclo e ergueu este último em triunfo. Quando regressámos a casa, minha mãe aguardava-nos, ansiosa, à entrada. Chovia. Meu pai, mal desceu a carruagem, lançou-se-lhe nos braços, soluçando:

- Se tivesse dito mais dois, ganhava eu.

Será que este pai tem razão? Para ganhar bastaria ter dito mais dois? Quem poderá ganhar este concurso?

2. Como poderias explicar a alguém o que é o infinito?

3. Indica o valor lógico das seguintes afirmações, assinalando com um X a resposta correcta.

		Verdadeira	Falsa
1.	Todo o segmento de recta contém um conjunto infinito de pontos.		
2.	Todo o plano contém um número infinito de pontos.		
3.	0,0(9) > 0,0999999999999		
4.	Entre quaisquer dois pontos de uma recta é sempre possível existir outro.		
5.	Toda a recta contém um conjunto infinito de pontos.		
6.	0,(7) – 0,777777 = 0		

4. Quantos elementos têm os seguintes conjuntos?

4.1. { };

4.2. {-1, 2, 5, 8};

4.3. {1, 2, 3, 4, 5, …}.

Trabalho realizado por:

Cristina Freitas

Elsa Gonçalves

Ema Silva