

Universidade do Minho Departamento de Matemática

MATEMÁTICA NA ASTRONOMIA

Trabalho de Projecto

Fátima Isabel Rodrigues Gonçalves Liliana Manuela Alves Magalhães Susana Cristina Ribeiro Pereira

Trabalho efectuado sob a orientação de Doutor Filipe Carteado Mena

Conteúdo

1	Intr	oduçã	o	5		
2	Enq	ıuadra:	mento histórico	6		
3	Mecânica Newtoniana					
	3.1	Prelin	ninares	9		
		3.1.1	Leis de Newton	9		
		3.1.2	Noções básicas	10		
		3.1.3	Equações de Lagrange	10		
	3.2	Proble	ema de dois corpos	12		
		3.2.1	Equações do movimento	12		
		3.2.2	Integração das equações de movimento	14		
4	Álø	ebra L	inear e Referenciais em Astronomia	18		
_	4.1		itos base	18		
		4.1.1	Espaço vectorial	18		
		4.1.2	Combinações lineares e independência linear	19		
		4.1.3	Geradores e bases de um espaço vectorial	19		
		4.1.4	Produto interno e norma de um vector	19		
		4.1.5	Bases ortogonais e ortonormadas	20		
		4.1.6	Referenciais	20		
		4.1.7	Rotações em \mathbb{R}^3	20		
	4.2		nas e Transformações de Coordenadas	23		
	1.2	4.2.1	Coordenadas esféricas	23		
		4.2.2	Esfera celeste	23		
		4.2.3	Sistemas de Coordenadas celestes	$\frac{25}{25}$		
		4.2.4	Transformação de coordenadas celestes	29		
5	A et	ronom	ia no Ensino da Matemática	31		
9	5.1		stas para experiências pedagógicas	34		
	5.1	5.1.1	Astrolábio	34		
		5.1.1	Altura de um Edifício	36		
		5.1.3	Determinação da Latitude e da Longitude	$\frac{30}{38}$		
		5.1.3	A Estrela Polar e a Latitude	30 44		
		5.1.4 $5.1.5$	Eratóstenes e um meridiano da Terra	44		
		5.1.5	Paralaye e a distância de uma estrela à Terra	40		

6	$\mathbf{E}\mathbf{x}\mathbf{p}$	Experiência pedagógica						
	6.1	Implementação das Actividades	51					
	6.2	Resultados de aprendizagem	53					
	6.3	Análise crítica	54					
	6.4	Sugestões	54					
	6.5	Conclusão	55					
Bibliografia								

Lista de Figuras

3.1	Representação de trajectórias no espaço fase para $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ e diferentes valores da
	excentricidade: (a) $e = 0$; (b) $e = 0.6$; (c) $e = 1$ e; (d) $e = 1.25 \dots 16$
3.2	Segunda lei de Kepler
4.1	Rotação em torno do eixo dos xx
4.2	Rotação em torno do eixo dos yy
4.3	Rotação em torno do eixo dos zz
4.4	Coordenadas esféricas
4.5	Sistema Horizontal Local de coordenadas
4.6	Sistema horário de coordenadas
4.7	Sistema Equatorial de coordenadas
4.8	Sistema Eclíptico de coordenadas
4.9	Transformação de coordenadas
5.1	Astrolábio
5.2	Escola
5.3	Determinação da altura de um edifício
5.4	Esquema da determinação da altura do edifício
5.5	Latitude
5.6	Longitude
5.7	Equinócio
5.8	Solstício
5.9	Esquema do equinócio
5.10	Esquema do solsticio
5.11	Estrela Polar
5.12	Esquema da situação da Estrela Polar
5.13	Poço de Siena
5.14	Globo
5.15	Paralaxe
6.1	Turma
6.2	Construção do Astrolábio
6.3	Medir a altura angular

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas nenhuma outra ciência fez um progresso comparável ao da Astronomia [6]. A Astronomia tem dado contribuições importantes de índole prática para a Terra e com grandes benefícios para a sociedade. Por exemplo, a tecnologia desenvolvida para a construção de antenas, espelhos e telescópios é usada em estudos da Terra a partir do Espaço, telecomunicações, estudos de retina e correcção de problemas oftalmológicos. Os detectores de raios-X de fraca intensidade, tão importantes para a segurança dos aeroportos, foram inicialmente desenvolvidos para a detecção da emissão de fontes astronómicas (como quasares). Também os detectores de infravermelhos usados por astrónomos são agora aplicados ao diagnóstico de tumores [20].

São várias as organizações internacionais que se dedicam à Astronomia. Referindo alguns exemplos: União Astronómica Internacional (UAI ou IAU), European Southern Observatory (ESO), International Ultraviolet Explorer, Canada-France-Hawaii Telescope, Satélites Astronómicos (IRAS, Hubble, ISO) e Redes de Telescópios.

Nos últimos anos a Astronomia tem tido uma contínua e crescente importância. São vários os factos que reflectem um interesse cada vez maior das pessoas por esta ciência. Em todo o mundo, nos jornais principais, os artigos de Astronomia têm marcado presença constante (tipicamente mais do que um artigo por semana). Nos Estados Unidos da América (EUA) as principais revistas de ciência para o público (*Scientific American, Discover, Science Digest*) dedicam 7% das suas páginas à Astronomia. Na maior parte dos países europeus e EUA, planetários e observatórios são visitados por milhões de pessoas todos os anos. As páginas web de Astronomia são das mais visitadas na Internet[20].

Neste contexto elaborou-se o trabalho intitulado *Matemática na Astronomia* no qual se pretende mostrar que muitos problemas surgidos no estudo da Astronomia são resolvidos usando conhecimentos da Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico.

Neste trabalho começa-se por fazer um enquadramento histórico da Astronomia focando a Grécia Antiga e alguns contributos importantes dos séculos XVI, XVII e XVIII. De seguida, no capítulo 3, aborda-se a Mecânica Newtoniana, em particular, o problema de dois corpos. No capítulo 4 são abordados alguns sistemas de coordenadas utilizados em Astronomia e transformações de sistemas de coordenadas. Posteriormente no capítulo 5, propõem-se várias experiências ligadas à Astronomia e à Matemática a serem realizadas em contexto educativo, no 3ºCiclo do Ensino Básico. Por último, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões de uma experiência pedagógica realizada na Escola Básica 2 e 3 de Vila Verde com alunos do 9ºano de escolaridade.

Capítulo 2

Enquadramento histórico

A Astronomia é a ciência que estuda a origem, evolução, composição, classificação e dinâmica dos corpos celestes.

O estudo da Astronomia começou por ser mais direccionado para as observações dos movimentos dos corpos celestes. Mais tarde astrónomos foram capazes de descobrir as distâncias e as dimensões de muitos dos corpos celestes e mais recentemente adquiriram uma quantidade considerável de conhecimentos acerca da natureza e dos materiais que os constituem[4].

A Astronomia começou por ser fundamentalmente utilitária e as suas aplicações imediatas destinavam-se a satisfazer as necessidades prementes da humanidade: para a agricultura, base da subsistência, era vital determinar o início das estações do ano, prevendo as épocas mais adequadas para as sementeiras; as cerimónias e rituais religiosos (tal como ainda hoje sucede com a Páscoa) tinham de ser realizados em épocas próprias, que exigiam preparação antecipada[6].

Os gregos desenvolveram a Astronomia entendendo-a como um ramo da Matemática. Do esforço dos gregos em conhecer a natureza do cosmos, e com o conhecimento herdado dos babilónios sobre as suas aritméticas envolvendo o tempo e as distâncias angulares, os gregos conseguiram transformar as suas cosmologias especulativas em modelos geométricos. Com os gregos surgiram os primeiros conceitos de Esfera Celeste, entendida por eles como uma esfera onde as estrelas eram pontos brilhantes numa esfera gigante que englobava a Terra. Desconhecedores da rotação da Terra, os gregos imaginaram que a esfera celeste girava em torno de um eixo passando pela Terra. Dos resultados então descobertos, alguns são, ainda hoje, impressionantes: a previsão de um eclipse por Tales de Mileto na década de 580 a.C., a elaboração de cartas celestes e cartas geográficas. Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.), concluiu que a Terra era aproximadamente esférica (usando o argumento que a sombra da Terra na Lua durante os eclipses era sempre circular) e determinou distâncias relativas dos corpos celestes. Eratóstenes (276-194 a.C.), foi o primeiro a medir o diâmetro da Terra. Usando ângulos de sombras criadas em regiões totalmente distintas, estimou o perímetro da circunferência da Terra com uma grande precisão(como veremos no capítulo 5). Eratóstenes também estimou a distância ao Sol e a distância à Lua, usando dados obtidos durante os eclipses da Lua. Ptolomeu foi o último grande astrónomo grego conhecido por ter escrito o grande tratado de Astronomia Almagesto onde sugere um sistema geocêntrico, baseado em conceitos de geometria. Este sistema explicava o carácter errante dos planetas, para além de explicar as diferenças de velocidade entre os diferentes pontos da alegada órbita dos planetas em torno da Terra[9]. Na obra Almagesto encontram-se também registos das construções e uso de instrumentos astronómicos, como por exemplo, o astrolábio.[4]

Nicolau Copérnico (1473-1543), foi um astrónomo e matemático que provocou uma revolução na Astronomia. Considerado o pai da Astronomia moderna, desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar. Em 1530, termina a sua grande obra, *De revolutionus orbium coelestium*, onde afirma que a Terra tem dois movimentos, o de rotação e o de tranlacção. Esta hipótese é consi-

derada uma das mais importantes hipóteses científicas de todos os tempos, tendo constituído o ponto de partida da Astronomia moderna[9].

Pedro Nunes (1502-1578), um dos mais importantes cientistas portugueses, estudou a obra de Copérnico. Em particular, detectou alguns erros que Copérnico cometera nos capítulos iniciais onde trata questões de geometria plana e esférica.

Pedro Nunes possuia um conhecimento profundo da geometria que aplicou à Geometria e à Astronomia. Percorrendo as obras de Pedro Nunes, nota-se, muitas vezes o seu engenho manifestar-se na invenção de instrumentos astronómicos e de métodos geográficos ou mecânicos para a resolução de diversos problemas numéricos.

A obra de Copérnico foi o alicerce no qual se apoiaram outros grandes pensadores da humanidade, como Kepler, Galileu e Newton[9].

Johannes Kepler (1571-1630), quando estudou o movimento do planeta Marte definiu três leis que generalizou a todos os outros planetas do Sistema Solar. São as chamadas Leis de Kepler (que são deduzidas no Capítulo 3). Kepler pensava que leis matematicamente simples são a base de todos os fenómenos naturais e que o Sol é a causa física de todos os movimentos celestes.

Em 1609, o cientista italiano Galileu Galilei (1564-1642) observou o céu através de um telescópio pela primeira vez. O telescópio de Galileu veio revelar várias provas em favor das ideias de Copérnico [9].

Em 1687 é publicada a obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Isaac Newton (1643-1727). Esta obra, designada habitualmente por *Principia*, contém as leis de Newton para o movimento dos corpos que formam a fundação da Mecânica Clássica (apresentadas no capítulo 3), assim como a lei da gravitação universal. O objectivo fundamental dos *Principia*, reside na explicação do movimento dos corpos celestes, sendo fornecido um modo rigoroso de derivar as Leis de Kepler e fornecendo uma explicação da causa desse movimento.

Nos Principia, Newton, chegou à formulação de leis naturais que se aplicam tanto a fenómenos terrestre como a fenómenos celestes, leis que explicam o movimento do cometa e da bala, a queda da maçã e a trajectória da Lua em torno Terra. Por consequência logo após a publicação dos Principia algumas das técnicas e ideias nele presentes, começaram a ser usadas na resolução de diversos problemas da Astronomia. O impacto da obra de Newton estendeu-se muito para além da Astronomia e da Física, deu origem a uma atitude optimista em relação à capacidade humana de, através da Matemática, entender o universo, que funcionava de acordo com leis deterministas expressas por equações diferenciais. Com efeito a lei da gravitação universal, estabelecida por Newton no séc. XVII, permite uma boa aproximação ao estudo do movimento dos corpos celestes no Sistema Solar, tendo Newton demonstrado que o sistema de equações diferenciais que descreve o movimento de dois corpos e tem solução geral. Contudo, a resolução do problema de dois corpos, sendo um deles o Sol, apenas permite uma primeira aproximação ao real movimento dos planetas, pois as forças entre os planetas causam perturbações nestas órbitas elípticas[16].

O problema de n corpos, com n > 2, revelou-se um problema difícil. No entanto, é possível obter para o problema de 3 corpos Newtoniano soluções particulares. Considerando um sistema de três corpos colineares, Euler(1707-1783), encontrou em 1763 três configurações possíveis em que os três corpos orbitam em torno do seu centro de massa em movimento circular uniforme. Em particular, num sistema formado por três corpos, estes definem um triângulo equilátero e esta configuração mantém-se mesmo que os três corpos tenham massas distintas. Estas soluções triangulares foram estudadas por Lagrange (1736-1813), em 1772[16].

Galileu observou Neptuno, em 1613 (três anos depois de ter observado os satélites de Júpiter), tendo observado, em duas noites consecutivas, que este se movia ligeiramente em relação a uma estrela próxima. Nos dias seguintes, Neptuno já estava fora do seu campo de vista e nos dias anteriores os céus de Pisa tinham estado enevoados. Assim, Galileu classificou-o como

uma estrela. Muito mais tarde, em meados do séc. XIX, verificou-se que a órbita de Úrano não estava inteiramente de acordo com as leis de Newton e Kepler. Adams e Le Verrier predisseram, independentemente, que deveria haver um outro planeta, mais afastado do Sol, a perturbar a órbita de Úrano. Com base nos seus cálculos, Galle e d'Arrest localizaram Neptuno, na noite de 23 de Setembro de 1846. Mas hoje sabe-se que as órbitas calculadas por Adams e Le Verrier divergiam rapidamente, ou seja, se as observações de Galle e d'Arrest tivessem sido feitas alguns anos antes ou depois de 1846 não teriam encontrado o planeta. Não obstante, a descoberta do planeta Neptuno e mostrou claramente que nas mãos dos especialistas a combinação da Astronomia com a Matemática pode ser uma ferramenta com grande poder[12].

Laplace (1773), Lagrange (1776) e Poisson (1809) apresentam provas da estabilidade do Sistema Solar. No entanto, estas provas apenas permitem concluir a estabilidade do Sistema Solar para algumas décadas ou séculos. Resultados obtidos por Poincaré (1892) sugerem que o desenvolvimento em séries, utilizadas nestas provas de estabilidade, divergem[16].

Ao estudar o problema de três corpos, Poincaré apercebeu-se que determinadas condições iniciais dão origem a soluções que descreveu como complicadas, fornecendo as bases para o desenvolvimento da Teoria do Caos. A compreensão do caos e as suas implicações na estabilidade do Sistema Solar tem sido um dos objectos de estudo na moderna Mecânica Celeste [16].

Com a generalização da utilização dos computadores na investigação científica, no início dos anos setenta, e a consequente possibilidade de realizar simulações numéricas até então impossíveis, as questões ligadas à existência, ou não, de regularidade no Sistema Solar tomou novos contornos. Assim hoje em dia o problema coloca-se fundamentalmente ao nível do estudo da estabilidade do Sistema Solar. Porque ocupam os planetas as posições que hoje observamos? Serão essas posições dinamicamente estáveis? No início da formação do sistema solar eram estas as posições? Como evoluirá o sistema solar?

A Astronomia influenciou a humanidade durante toda a Pré-História e História conhecida. O conhecimento sobre o universo sempre fez parte da curiosidade humana. Satisfazer essa curiosidade foi um estimulo muito grande para desenvolver a Matemática. Por outro lado, também Matemática contribuiu para o desenvolvimento da Astronomia, permitindo a quantificação e previsão de fenómenos astronómicos.

Capítulo 3

Mecânica Newtoniana

Neste capítulo trata-se o problema de dois corpos no espaço tridimensional sujeitos à lei da gravitação de Newton, o que poderá ser, por exemplo, uma primeira aproximação ao movimento de alguns corpos celestes. Deduzem-se as equações do movimento dos dois corpos C_1 de massa m_1 e C_2 de massa m_2 , a partir do Lagrangiano (3.6). De seguida integra-se o sistema de equações diferenciais obtido, determinando-se as soluções do problema de dois corpos e obtêm-se as leis de Kepler a partir da Teoria Newtoniana.

3.1 Preliminares

3.1.1 Leis de Newton

A Mecânica Newtoniana é baseada em três leis enunciadas por Isaac Newton na obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687. Estas leis supõem a existência de referenciais nos quais são válidas, designados *referenciais inerciais*. As leis são as seguintes:

Lei 1 (lei da inércia) Se sobre uma partícula não actuam quaisquer forças, então essa partícula mantém-se em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme.

Designando por \vec{f} o vector força e por \vec{v} o vector velocidade da partícula, a primeira lei de Newton pode ser escrita do seguinte modo

Se
$$\vec{f} = \vec{0}$$
, então \vec{v} é constante.

Lei 2 Se sobre uma partícula actuam forças, a variação do momento linear da partícula por unidade de tempo é igual à soma das forças que actuam nela.

Se \vec{p} é o vector momento linear da partícula e \vec{f} o vector força que actua na partícula, então

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}.$$

Lei 3 (lei da acção e reacção) Quando duas partículas interagem a força que a primeira exerce sobre a segunda é igual em grandeza e direcção, mas de sentido oposto à força que a segunda exerce na primeira.

Se \vec{f}_{21} é o vector força que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2 e \vec{f}_{12} é o vector força que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1, então

$$\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}.$$

Se a massa da partícula, m, é constante, pode reescrever-se a segunda lei de Newton. O momento linear de uma partícula é definido por $\vec{p} = m\vec{v}$. Substituindo, temos

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}.$$

3.1.2 Noções básicas

Consideremos um sistema com n corpos.

Para j=1,...,n seja $\vec{r_j}$ a posição de um corpo desse sistema, $\dot{\vec{r_j}}$ a velocidade desse corpo e m_j a respectiva massa.

Definição 1 O vector posição do centro de massa do sistema é definido por

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r_j}$$
 (3.1)

sendo, $M = \sum_{j=1}^{n} m_j$ a massa total do sistema.

Definição 2 O vector momento angular do sistema é definido por

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_j} \times m_j \vec{r_j}. \tag{3.2}$$

Definição 3 A energia cinética do sistema, E_c é definida por

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r_j}^2. \tag{3.3}$$

Definição 4 A energia mecânica do sistema é definida por

$$E = E_c + U \tag{3.4}$$

sendo, E_c a energia cinética e U a energia potencial do sistema.

3.1.3 Equações de Lagrange

Para definirmos a posição de um sistema com n corpos no espaço é necessário especificar n vectores posição, isto é, 3n coordenadas. O número de variáveis independentes necessárias para definir de forma única a posição do sistema é chamado o número de graus de liberdade do sistema. Por exemplo, um sistema com n corpos no espaço sujeito a c condições pode ser descrito de forma única por N variáveis independentes, com N=3n-c.

Quaisquer N variáveis $q_1,...,q_N$ que definam a posição de um sistema com N graus de liberdade são designadas coordenadas generalizadas e as derivadas $\dot{q}_1,...,\dot{q}_N$ são designadas velocidades generalizadas.

Consideremos um sistema com N variáveis independentes.

A posição de um corpo desse sistema no instante t é dada pelo vector $\vec{x}(t) = (x_1(t), ..., x_N(t))$, a respectiva velocidade por $\dot{\vec{x}}(t) = (\dot{x_1}(t), ..., \dot{x_N}(t))$ e o movimento desse corpo é descrito pela função de Lagrange $L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$ tal que

$$\vec{x}: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}^N \qquad \dot{\vec{x}}: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
 $t \longrightarrow \vec{x}(t), \qquad t \longrightarrow \dot{\vec{x}}(t)$

e,

$$\begin{array}{cccc} L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) & \longrightarrow & L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t). \end{array}$$

Para $\vec{q}=(q_1,...,q_N)$, vector de coordenadas generalizadas, e para $\dot{\vec{q}}=(\dot{q}_1,...,\dot{q}_N)$, vector de velocidades generalizadas, a variação de \vec{q} com o tempo obedece às equações de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad i = 1, ..., N$$
(3.5)

Para um sistema mecânico em que as forças se deduzem de um potencial generalizado que depende explicitamente apenas das coordenadas definem-se as funções E_c e U, sendo a energia cinética e a energia potencial definida, respectivamente, por:

$$E_c: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
 $U: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ $\dot{\vec{q}} \longrightarrow \frac{1}{2} \dot{\vec{q}} . \dot{\vec{q}}^T, \qquad \vec{q} \longrightarrow U(\vec{q}).$

A função de Lagrange, ou Lagrangiano, correspondente escreve-se como

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = E_c(\dot{\vec{q}}) - U(\vec{q}). \tag{3.6}$$

Aplicando a esta função as equações de Lagrange (3.5) tal que, para i = 1, ...N

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} = \ddot{q}_i
\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$
(3.7)

obtém-se,

$$\ddot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, ..., N$$

sendo este sistema coincidente com as equações de Newton, para $\vec{f} = -\nabla U$, sendo \vec{f} o vector de forças generalizadas.

3.2 Problema de dois corpos

3.2.1 Equações do movimento

Consideremos um referencial inercial de origem O e dois corpos C_1 , de massa m_1 , e C_2 de massa m_2 . Sejam $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ os vectores posição definidos por O e C_1 e O e C_2 , respectivamente. A energia cinética deste sistema, E_c , é

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}_2}^2. \tag{3.8}$$

Seja \vec{R} o vector posição definido por O e o centro de massa do sistema, e seja \vec{r} o vector

$$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}. \tag{3.9}$$

Da definição do vector posição do centro de massa vem

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2}. (3.10)$$

Das equações (3.9) e (3.10) temos

$$\vec{r_1} = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$
 e $\vec{r_2} = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$. (3.11)

Usando as equações (3.11) podemos exprimir a energia cinética do sistema (3.8) em termos de $\dot{\vec{R}}$ e $\dot{\vec{r}}$, em vez de $\dot{\vec{r_1}}$ e $\dot{\vec{r_2}}$.

Substituindo, vem

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2, \quad \text{com} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$
 (3.12)

Assim, o Lagrangiano (3.6) pode escrever-se como

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \tag{3.13}$$

sendo a energia potencial,

$$U(\vec{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{||\vec{r}||} \tag{3.14}$$

com G a constante de gravitação universal.

Supondo que sobre o sistema não actuam forças externas vem, pelas segunda e terceira leis de Newton,

$$m_1 \ddot{\vec{r_1}} + m_2 \ddot{\vec{r_2}} = \vec{0}. \tag{3.15}$$

De (3.10) e (3.15) vem $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$. Concluímos que $\dot{\vec{R}}$ é constante, o que significa que podemos escolher um referencial inercial no qual o centro de massa está em repouso, isto é, $\dot{\vec{R}} = \vec{0}$. Assim, pode reescrever-se o Lagrangiano do seguinte modo

$$L = \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}). \tag{3.16}$$

Recorrendo às equações de Lagrange (3.5), o problema de dois corpos reduz-se à Equação Diferencial Ordinária (EDO):

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad \text{com} \quad \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \frac{Gm_1m_2\vec{r}}{||\vec{r}||^3}.$$
 (3.17)

Ou seja,

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu^*}{||\vec{r}||^3} \vec{r} = \vec{0}, \quad \vec{r}, \ddot{\vec{r}} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{com} \quad \mu^* = G(m_1 + m_2).$$
 (3.18)

O problema de dois corpos sujeitos a interacções mútuas é reduzido ao problema de um corpo com massa reduzida, μ , sujeito a uma força central igual à força de interacção dos dois corpos.

Proposição 1 O momento angular é um integral do sistema.

Demonstração Seja \vec{l} o momento angular do sistema. Por definição $\vec{l} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$. Então,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \mu(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}.$$

Ora, pela equação (3.18) vem

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \mu \vec{r} \times \left(-\frac{\mu^*}{||\vec{r}||^3} \right) \vec{r} = \vec{0}.$$

Donde se conclui que \vec{l} é um integral do sistema. \bullet

Se $\vec{l} = \vec{0}$ então os vectores posição, \vec{r} , e velocidade, $\dot{\vec{r}}$, são paralelos, isto é, o movimento realiza-se numa linha recta.

Se $\vec{l} \neq \vec{0}$, com \vec{l} é perpendicular ao plano definido pelos vectores posição e velocidade, os dois corpos movimentam-se num plano, designado plano orbital, o que reduz o problema a um problema a duas dimensões.

Podemos introduzir coordenadas polares, r, θ , nesse plano, com $r \in [0, +\infty[$ e $\theta \in [0, 2\pi[$ Recordando, l e E são, respectivamente, o módulo do vector momento angular e a energia mecânica do sistema. Em coordenadas polares temos,

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} \tag{3.19}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \tag{3.20}$$

Exprimindo o Lagrangiano em coordenadas polares obtém-se

$$L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r). \tag{3.21}$$

Recorrendo às equações de Lagrange (3.5) obtemos as EDOs

$$\begin{cases} \mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\theta}) &= 0 \end{cases}$$

que são equivalentes às equações

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu^*}{r^2} = 0 ag{3.22}$$

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\theta}) = 0. ag{3.23}$$

Podemos reescrever a equação (3.20) da seguinte forma

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r}.$$

Derivando esta equação em ordem ao tempo obtemos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\mu 2\dot{r}\ddot{r} - \frac{l^2}{2\mu} \frac{2r\dot{r}}{r^4} + \frac{Gm_1m_2\dot{r}}{r^2}
= \mu\dot{r}\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu} \frac{\dot{r}}{r^3} + \frac{Gm_1m_2\dot{r}}{r^2}
= \dot{r}\left(\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{Gm_1m_2}{r^2}\right)
= \dot{r}\mu\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu^*}{r^2}\right)$$

Logo pela equação (3.22) concluímos que a energia mecânica é um integral do sistema.

3.2.2 Integração das equações de movimento

Proposição 2 O sistema de EDOs

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu^*}{r^2} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

com condições iniciais $r(0) = r_0 \wedge \dot{r}(0) = v_0$ é integrável e a solução é a equação geral da cónica em coordenadas polares,

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

sendo p o lado recto, e a excentricidade da cónica e θ_0 constante.

Demonstração Seja $k = r^2\theta$. Da equação (3.19) vem que k é constante.

Seja
$$u = \frac{1}{r}$$
.

Então,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{k}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -k \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r}\right) = -k \frac{du}{d\theta}.$$

Donde segue,

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{k^2}{r^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -k^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}.$$

Introduzindo,

$$k = r^2 \dot{\theta}$$
 e $\ddot{r} = -k^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$,

na equação

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu^*}{r^2} = 0$$

obtemos a seguinte EDO,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu^*}{k^2}. (3.24)$$

Através de uma nova mudança de variável, definindo $y = u - \frac{\mu^*}{k^2}$, obtemos a equação

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0. ag{3.25}$$

A solução desta EDO, sujeita às condições $y(0) = A \wedge \dot{y}(0) = B$ é dada por

$$y(\theta) = D\cos(\theta - \theta_0)$$

com $D=\sqrt{A^2+B^2}$ e $\theta_0=\arccos\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ constantes de integração.

Então,

$$u(\theta) = \frac{\mu^*}{k^2} \left[1 + \frac{Dk^2}{\mu^*} \cos(\theta - \theta_0) \right]$$

e por conseguinte

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \tag{3.26}$$

$$com p = \frac{k^2}{\mu^*} e e = \frac{Dk^2}{\mu^*}. \bullet$$

A equação (3.26) representa a equação de uma secção cónica. O tipo de cónica depende da excentricidade, e. Se e>1 obtém-se uma hipérbole, se e=1 obtém-se uma parábola, se 0<e<1 obtém-se uma elipse e se e=0 obtém-se uma circunferência. Na Figura 3.1 representam-se algumas trajectórias no espaço fase.

Os pontos da órbita onde a distância entre os corpos é mínima chamam-se pericentros e os pontos da órbita onde a distância é máxima apocentros. Se θ é medido a partir do pericentro, então $\theta_0=0$.

No início do século XVII Johannes Kepler enunciou três leis sobre o movimento dos planetas em torno do Sol e que hoje detêm o seu nome.

A equação (3.26) explica a primeira lei de Kepler: o movimento dos planetas descrevem órbitas elípticas em torno do sol que se encontra num dos focos.

Vejamos que a segunda lei de Kepler: áreas varridas pelo vector posição em tempos iguais são iguais, é uma consequência do facto do momento angular ser constante.

Sabemos que o momento angular do sistema, l, é constante (3.19).

Seja P a posição do corpo no instante t e Q a sua posição no instante t+dt conforme se mostra na Figura 3.2. Para um intervalo de tempo dt suficientemente pequeno o raio vector r "varre" a área

$$dA = \frac{1}{2}\overline{OP}\,\overline{PQ}$$
, isto é, $dA = \frac{1}{2}r^2d\theta$.

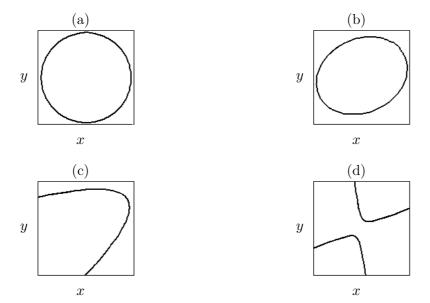


Figura 3.1: Representação de trajectórias no espaço fase para $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ e diferentes valores da excentricidade: (a) e = 0; (b) e = 0.6; (c) e = 1 e; (d) e = 1.25.

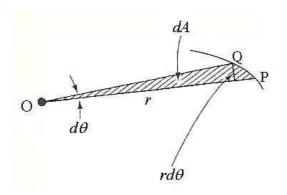


Figura 3.2: Interpretação geométrica da segunda lei de Kepler.

e então podemos determinar a área "varrida" pelo raio vector do corpo por unidade de tempo,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2\mu}.$$

Como l é constante concluímos que A é constante.

Suponhamos agora que a órbita é elíptica.

Assumamos que θ é medido a partir do pericentro.

Designando por r_p e r_a o pericentro e o apocentro, respectivamente, obtemos

$$r_p = \frac{k^2}{\mu^*} \frac{1}{1 + e\cos(0)} = \frac{k^2}{\mu^*} \frac{1}{1 + e}$$
 (3.27)

$$r_p = \frac{k^2}{\mu^*} \frac{1}{1 + e \cos(0)} = \frac{k^2}{\mu^*} \frac{1}{1 + e}$$

$$r_a = \frac{k^2}{\mu^*} \frac{1}{1 + e \cos(\pi)} = \frac{k^2}{\mu^*} \frac{1}{1 - e}$$
(3.27)

Deduzamos a terceira lei de Kepler: o quadrado do período orbital é directamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse.

Sabemos que a área limitada por uma elipse de semi-eixos a e b é dada por $A = \pi ab$. Seja T o período orbital. Então,

$$A = \int_0^T \frac{l}{2\mu} dt = \frac{lT}{2\mu}.$$
 (3.29)

Donde,

$$T = \frac{2\mu\pi ab}{l}. (3.30)$$

Sendo a o semi-eixo maior, b o semi-eixo menor e e excentricidade da elipse, b é dado por $b^2 = a^2(1 - e^2).$

Uma propriedade óbvia de uma elipse é $2a=r_p+r_a$. Então, de (3.27) e (3.28) vem $k^2=a\mu^*(1-e^2)$, e por conseguinte

$$l^2 = \mu^2 a \mu^* (1 - e^2). \tag{3.31}$$

Das equações (3.30) e (3.31) obtemos,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu^*}. (3.32)$$

A equação (3.32) traduz a terceira lei de Kepler.

Capítulo 4

Álgebra Linear e Referenciais em Astronomia

Neste capítulo são abordadas noções básicas de Álgebra Linear e Geometria Analítica, seguindo-se o estudo dos Sistemas de Coordenadas Celestes mais utilizados em Astronomia e a transformação de coordenadas entre Sistemas de Coordenadas Celestes.

4.1 Conceitos base

4.1.1 Espaço vectorial

Definição 5 Seja V um conjunto não vazio e K um corpo.

Diz-se que V é um espaço vectorial sobre o corpo K se e só se em V estão definidas duas operações:

- 1. a adição vectorial, $+: V \times V \rightarrow V$;
- 2. a multiplicação por um escalar, \cdot : $K \times V \rightarrow V$

tais que as seguintes condições se verificam:

a)
$$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1;$$

b)
$$\forall \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in V, (\vec{v_1} + \vec{v_2}) + \vec{v_3} = \vec{v_1} + (\vec{v_2} + \vec{v_3});$$

c)
$$\forall \vec{v_1} \in V$$
, $\exists O_V \in V$: $\vec{v_1} + O_V = \vec{v_1}$;

$$d) \ \forall \ \vec{v_1}, \quad \exists \ -\vec{v_1} \in V : \quad \vec{v_1} + (-\vec{v_1}) = O_V;$$

$$(e) \ \forall \ \vec{v_1}, \ \vec{v_2} \in V, \ \forall \ \lambda \in K, \ \lambda (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \lambda \vec{v_1} + \lambda \vec{v_2};$$

$$f) \ \forall \ \vec{v}_1 \in V, \quad \forall \ \lambda, \ \mu \in K, \quad (\lambda + \mu) \ \vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_1;$$

$$q) \ \forall \ \vec{v_1} \in V, \quad \forall \ \lambda, \ \mu \in K, \quad (\lambda \mu) \ \vec{v_1} = \lambda (\mu \vec{v_1});$$

$$h) \ \forall \ \vec{v_1} \in V, \quad 1 \cdot \vec{v_1} = \vec{v_1}.$$

Tal espaço vectorial representa-se por $(V, +, K, \cdot)$.

Os elementos de V designam-se vectores e os elementos de K designam-se escalares.

Se $K = \mathbb{R}$, diz-se que V é um espaço vectorial real.

4.1.2 Combinações lineares e independência linear

Definição 6 Seja V um espaço vectorial sobre um corpo K e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

• Diz-se que $\vec{v} \in V$ é combinação linear dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ se exitem escalares $\lambda_i \in K$ $(i = 1, \dots, n)$ tais que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i.$$

• Diz-se que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes se o vector nulo, O_V , se escreve de forma única como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Isto é, sendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ escalares

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = O_V \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0. \tag{4.1}$$

Caso não se verifique a condição (4.1), dizemos que os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são linearmente dependentes.

4.1.3 Geradores e bases de um espaço vectorial

Definição 7 Seja V um espaço vectorial sobre um corpo K e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$. Se qualquer vector de V se pode escrever como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, então diz-se que o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ gera V. Representa-se,

$$V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$$
.

Definição 8 Um espaço vectorial V sobre um corpo K diz-se finitamente gerado se admite um conjunto de geradores finito.

Definição 9 Seja V um espaço vectorial sobre K finitamente gerado.

Uma sequência $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de vectores de V diz-se uma base de V se:

- i) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ é um conjunto de geradores de V;
- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes.

Exemplo 1 Consideremos o espaço vectorial real \mathbb{R}^n .

A sequência de vectores $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ tais que $\vec{e}_{i(i=1,\dots,n)}$ tem todas as coordenadas nulas excepto a componente i que é 1, forma uma base do espaço vectorial real \mathbb{R}^n . Esta base designa-se base canónica de \mathbb{R}^n .

4.1.4 Produto interno e norma de um vector

Definição 10 Seja V um espaço vectorial real.

Chama-se produto interno em V a qualquer aplicação $p:V\times V\to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(P1)
$$\forall \vec{v_1} \in V$$
, $p(\vec{v_1}, \vec{v_1}) \in \mathbb{R}_0^+ \land p(\vec{v_1}, \vec{v_1}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v_1} = O_V$;

(P2)
$$\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$$
, $p(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_3) = p(\vec{v}_1, \vec{v}_3) + p(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$;

(P3)
$$\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V, \ \forall \alpha \in K, \quad p(\alpha \vec{v_1}, \vec{v_2}) = \alpha p(\vec{v_1}, \vec{v_2});$$

(P4)
$$\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V, \quad p(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = p(\vec{v_2}, \vec{v_1}).$$

Nestas condições diz-se que V está munido do produto interno p.

Definição 11 Sejam V um espaço vectorial real munido do produto interno $p \ e \ \vec{v} \in V$. Chama-se norma de \vec{v} , e representa-se por $||\vec{v}||$, ao número real não negativo $\sqrt{p(\vec{v}, \vec{v})}$.

4.1.5 Bases ortogonais e ortonormadas

Definição 12 Sejam V um espaço vectorial real munido do produto interno p e $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ uma base de V.

Diz-se que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ é uma base ortogonal de V se, para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$i \neq j \Rightarrow p(\vec{v_i}, \vec{v_j}) = 0.$$

Definição 13 Seja V um espaço vectorial real.

Uma base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ de V diz-se ortonormada se é ortogonal e se todos os vectores que a constituem têm norma 1.

4.1.6 Referenciais

Definição 14 Sejam V um espaço vectorial real, $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ uma base de V e $A \in \mathbb{R}^n$. O conjunto $\mathcal{R} = \{A; (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)\}$ diz-se um referencial em \mathbb{R}^n , o ponto A diz-se origem do referencial \mathcal{R} e $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ diz-se base associada ao referencial. Os escalares $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ são chamados coordenadas de P no referencial \mathcal{R} .

Representa-se,

$$P \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{R}}.$$

Definição 15 Seja $O \in \mathbb{R}^3$ um ponto do espaço afim \mathbb{R}^3 e $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ uma base ortonormada do espaço vectorial \mathbb{R}^3 .

Ao referencial $\{O; (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\}$ chamamos sistema de coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 .

4.1.7 Rotações em \mathbb{R}^3

Definição 16 Seja $\mathcal{R} = \{O; (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\}$ um sistema de coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 . Uma rotação do referencial \mathcal{R} no espaço afim \mathbb{R}^3 é um movimento rígido dos eixos cartesianos de \mathcal{R} obtendo-se um referencial $\mathcal{R}' = \{O; (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\}$ tal que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ é uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 .

Uma rotação em \mathbb{R}^3 pode ser entendida como uma sucessão de rotações em torno dos eixos cartesianos de um referencial tridimensional.

Consideremos os referenciais $\mathcal{R} = \{O; (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\}$ e $\mathcal{R}' = \{O; (\vec{e_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})\}$ tais que O = (0, 0, 0), $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é a base canónica de \mathbb{R}^3 e os vectores $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ são, respectivamente, os vectores $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ submetidos a uma rotação de um ângulo ω .

Sejam $P \equiv (x, y, z)_{\mathcal{R}}$ e $P \equiv (x', y', z')_{\mathcal{R}'}$ as coordenadas cartesianas do ponto P nos referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' , respectivamente.

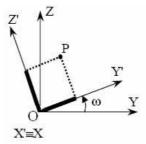


Figura 4.1: Rotação de um referencial cartesiano em torno do eixo dos xx segundo um ângulo ω .

Facilmente se conclui que

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\omega + z\sin\omega \\ z' = -y\sin\omega + z\cos\omega \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_x(\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad R_x(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}.$$

A matriz $R_x(\omega)$ representa uma rotação em torno do eixo dos xx segundo um ângulo ω .

Consideremos o referencial $\mathcal{R}'' = \{O; (\vec{u}_1, \vec{e}_2, \vec{u}_3)\}$ tal que os vectores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_3}$ são, respectivamente, os vectores $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_3}$ submetidos a uma rotação de um ângulo φ .

Seja $P \equiv (x'', y'', z'')_{\mathcal{R}''}$ as coordenadas cartesianas do ponto P no referencial \mathcal{R}'' .

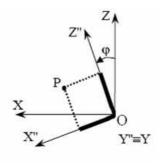


Figura 4.2: Rotação de um referencial cartesiano em torno do eixo dos yy segundo um ângulo φ .

Então, temos que

$$\begin{cases} x'' = x \cos \varphi - z \sin \varphi \\ y'' = y \\ z'' = x \sin \varphi + z \cos \varphi \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = R_y(\varphi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

A matriz $R_y(\varphi)$ representa uma rotação em torno do eixo dos yy segundo um ângulo φ .

Consideremos o referencial $\mathcal{R}''' = \{O; (\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{e_3})\}$ tal que os vectores $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ são, respectivamente, os vectores $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ submetidos a uma rotação de um ângulo ϕ .

Seja $P \equiv (x''', y''', z''')_{\mathcal{R}'''}$ as coordenadas cartesianas do ponto P no referencial \mathcal{R}''' .

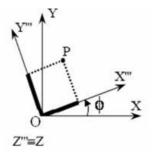


Figura 4.3: Rotação de um referencial cartesiano em torno do eixo dos zz segundo um ângulo ϕ .

Então, temos que

$$\begin{cases} x''' &= x\cos\phi + y\sin\phi \\ y''' &= -x\sin\phi + y\cos\phi \\ z''' &= z \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} = R_z(\phi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz $R_z(\phi)$ representa uma rotação em torno do eixo dos zz segundo um ângulo ϕ .

Note-se que uma matriz que representa uma rotação é o resultado do produto de matrizes que representam as rotações intermediárias em torno de cada um dos eixos de um referencial cartesiano.

4.2 Sistemas e Transformações de Coordenadas

4.2.1 Coordenadas esféricas

Na transformação de coordenadas celestes torna-se útil relacionar as coordenadas cartesianas e as coordenadas esféricas de um ponto de uma superfície esférica.

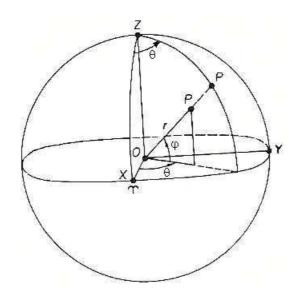


Figura 4.4: Esfera celeste e coordenadas esféricas.

Consideremos o referencial $\mathcal{R}=\{O;(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\}$ tais que O=(0,0,0) e $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ é a base canónica de \mathbb{R}^3 .

Seja $P \equiv (x, y, z)_{\mathcal{R}}$ as coordenadas cartesianas do ponto P no referencial \mathcal{R} .

Consideremos:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ou seja, r é a distância do ponto P ao ponto O;
- θ o ângulo, medido no sentido directo, que o semi-eixo positivo do eixo dos xx faz com a semi-recta com origem em O e que contém o ponto (x, y, 0). Note-se que $\theta \in [0, 2\pi[$;
- φ o ângulo que a semi-recta com origem em O e que contém o ponto (x, y, 0) faz com a semi-recta com origem em O e que contém o ponto P. Note-se que $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Assim, temos que as coordenadas cartesianas numa superfície esférica de raio r são dadas em termos de coordenadas esféricas por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

4.2.2 Esfera celeste

A Astronomia de Posição ocupa-se do estudo da posição dos astros. Para referir posições torna-se útil usar uma esfera (a esfera celeste¹) e marcar sobre a superfície esférica arcos e pontos

 $^{^1}$ Qualquer observador, visualizando o céu, tem a sensação de se encontrar no centro de uma esfera, no interior da qual as estrelas parecem fixas e igualmente afastadas do observador. É a esta esfera que se chama esfera celeste.

fundamentais.

A esfera celeste tem raio arbitrário e a Terra é considerada o centro da esfera celeste. Apesar das distâncias de diferentes astros à Terra variarem, todos os astros são considerados como pontos pertencentes à esfera celeste.

Alguns pontos relevantes da esfera celeste:

- Pólo Norte Celeste (PNC) e Pólo Sul Celeste (PSC) Pontos de intersecção da esfera celeste com o eixo de rotação da Terra, ou seja, podem ser entendidos como a projecção do Pólo Norte geográfico e a projecção do Pólo Sul geográfico na esfera celeste, respectivamente.
- Zénite (Z) e Nádir(N) Pontos de intersecção da esfera celeste com a vertical do lugar².

Antes de mencionar alguns planos fundamentais em Astronomia e correspondentes círculos de intersecção desses planos com a esfera celeste é importante começar por distinguir círculos máximos e círculos menores da esfera celeste.

- Círculo máximo Círculo da esfera celeste que resulta da intersecção da esfera celeste com planos que contém o seu centro.
- Círculo menor Círculo da esfera celeste que resulta da intersecção da esfera celeste com planos que não contém o seu centro.

Alguns círculos relevantes da esfera celeste e planos fundamentais em Astronomia:

- Círculo horário Qualquer círculo máximo da esfera celeste contendo o PNC e o PSC.
- Círculo vertical Qualquer círculo máximo da esfera celeste contendo o zénite e o nádir.
- Equador celeste Círculo máximo da esfera celeste ortogonal ao eixo de rotação da Terra.
- Plano do equador Plano que contém o equador celeste.
- Horizonte Círculo máximo da esfera celeste ortogonal à vertical do lugar.
- Plano do horizonte Plano que contém o horizonte.
- Meridiano local Círculo horário da esfera celeste que contém o zénite e o nádir. O meridiano intersecta o horizonte segundo a direcção Norte-Sul.
- Circulo de altura Qualquer círculo (menor) resultante da intersecção da esfera celeste com um plano paralelo ao horizonte.
- Paralelo Qualquer círculo (menor) resultante da intersecção da esfera celeste com um plano paralelo ao equador.

 $^{^2}$ Vertical do lugar é a recta suporte do vector de aceleração gravitacional no ponto da superfície terrestre onde o observador se encontra.

4.2.3 Sistemas de Coordenadas celestes

A posição de um astro na esfera celeste pode ser definida através de um sistema de coordenadas com a especificação de dois valores angulares.

Seguidamente, serão abordados os sistemas de coordenadas mais usados em Astronomia de Posição.

Sistema Horizontal Local de Coordenadas

A Figura 4.5 representa o sistema de coordenadas horizontais, ilustrando a metade da esfera celeste visível ao observador. A posição do observador é representada pelo ponto O e a posição do astro na esfera celeste pelo ponto E.

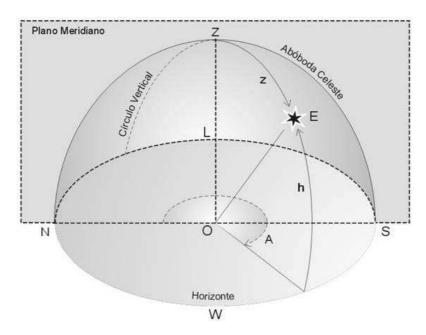


Figura 4.5: Ilustração do Sistema Horizontal Local de coordenadas.

O sistema horizontal de coordenadas tem as seguintes características:

- Direcção fundamental: a vertical do lugar.
- Plano fundamental: o plano do horizonte.
- Coordenadas:

Azimute(A) - Ângulo entre o meridiano local e o círculo vertical do astro³, medido ao longo do horizonte no sentido Norte-Este-Sul-Oeste⁴. Note-se que $A \in [0^{\circ}, 360^{\circ}]$.

Altura(h) - Ângulo entre o plano do horizonte e a direcção do astro (dada pelo segmento de recta [OE] na Figura 4.5), medido ao longo do círculo vertical do astro. A altura é arbitrada como positiva (negativa) para um astro acima (abaixo) do horizonte. Note-se que $h \in [-90^{\circ}, 90^{\circ}]$.

³Círculo vertical do astro: círculo vertical da esfera celeste que contém o astro.

⁴Alguns autores utilizam o ponto cardeal Sul para o início da contagem do azimute.

Ao complemento da altura, ξ , chama-se distância zenital, ou seja, é o ângulo entre a semi-recta com origem no observador e que contém o zénite e a direcção do astro. Temos que

$$\xi = 90^{\circ} - h$$
, donde $\xi \in [0^{\circ}, 180^{\circ}]$.

No sistema horizontal local as coordenadas de um astro dependem da posição do observador na superfície da Terra. Além disso, as coordenadas horizontais variam também com o tempo devido ao movimento de rotação da Terra, o que torna este sistema de coordenadas pouco prático para uso corrente em Astronomia.

É assim mais vantajoso um sistema de coordenadas em que o círculo de referência seja independente do observador, como é o caso do sistema de coordenadas celestes que será abordado seguidamente.

Sistema Horário de Coordenadas

A Figura 4.6 representa o sistema de coordenadas horárias. O ponto T representa o observador e o ponto E a posição do astro na esfera celeste.

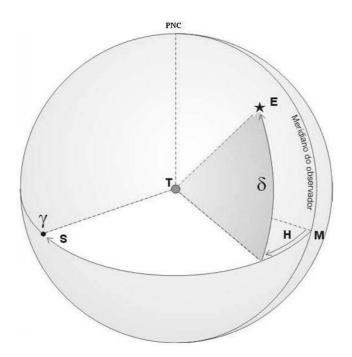


Figura 4.6: Ilustração do Sistema Horário de coordenadas.

O sistema horário de coordenadas tem as seguintes características:

- Direcção fundamental: o eixo de rotação da Terra.
- Plano fundamental: o plano do equador.
- Coordenadas:

 $\hat{A}ngulo\ horário(H)$ - Ângulo entre o meridiano local e o círculo horário do astro⁵, medido ao longo do equador. A origem da contagem de H é no meridiano local sendo crescente para Oeste. Note-se que $H \in [0^{\circ}, 360^{\circ}]$.

 $^{^5\}mathrm{C}$ írculo horário do astro: círculo horário da esfera celeste que contém o astro.

 $Declinação(\delta)$ - Ângulo entre o plano do equador e a direcção do astro (dada pelo segmento de recta [TE] na Figura 4.6), medido ao longo do círculo horário do astro. Note-se que $\delta \in [-90^{\circ}, 90^{\circ}]$.

Ao complemento da declinação, p, chama-se distância polar. Temos que

$$\delta + p = 90^{\circ}$$
, donde $p \in [0^{\circ}, 180^{\circ}]$.

Neste sistema de coordenadas, ao contrário do anterior, o plano fundamental é o mesmo para todos os observadores. No entanto, atendendo a que a origem do ângulo horário de um astro depende do observador convém utilizar para a origem de coordenadas um ponto que não dependa do observador e que ainda seja sobre o equador. Esta é uma das propriedades do sistema de coordenadas celestes que será abordado seguidamente.

Sistema Equatorial de Coordenadas

Para introduzir as coordenadas equatoriais é necessário definir a eclíptica.

A eclíptica é um círculo (máximo) da esfera celeste que resulta da intersecção do plano orbital da Terra com a esfera celeste. A eclíptica, representa assim, a trajectória aparente do Sol (com peridiciodade de um ano) na esfera celeste.⁶.

Chama-se obliquidade da eclíptica, e representa-se por ε , ao ângulo entre o plano do equador e o plano eclíptico⁷. ($\varepsilon \simeq 23^{\circ}26'21''$)

A intersecção da eclíptica e do equador determinam, na esfera celeste, dois pontos que correspondem aos equinócios: o equinócio de Primavera e o equinócio de Outono.

O ponto da esfera celeste correspondente ao equinócio de Primavera chama-se $Ponto\ Vernal\ (ou\ Ponto\ de\ Áries)$ e representa-se por γ .

A Figura 4.7 representa o sistema de coordenadas equatoriais. O ponto T representa o observador e o ponto E a posição de uma estrela na esfera celeste.

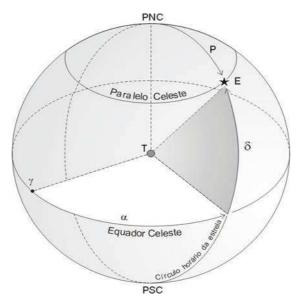


Figura 4.7: Ilustração do Sistema Equatorial de coordenadas.

⁶O movimento anual aparente do Sol deve-se ao movimento de translacção da Terra em torno do Sol.

⁷Plano eclíptico: Plano que contém a eclíptica.

O sistema equatorial de coordenadas é semelhante ao sistema de coordenadas horárias diferindo apenas no facto da coordenada sobre o equador, a ascenção recta α , ser medida a partir do Ponto Vernal γ .

A ascenção recta é o ângulo entre o plano que contém o PNC, T e γ e o plano que contém o PNC, T e E, ou seja, é o ângulo entre o círculo horário do ponto vernal e o círculo horário da estrela. A ascenção recta é medida para Este. Temos que $\alpha \in [0^{\circ}, 360^{\circ}]$.

Este sistema de coordenadas celestes, ao contrário dos anteriores abordados, tem coordenadas independentes do observador.

Sistema Eclíptico de Coordenadas

A Figura 4.8 representa o sistema de coordenadas eclípticas sendo que o ponto O representa o observador e o ponto E representa a posição do astro na esfera celeste.

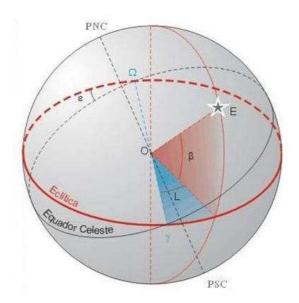


Figura 4.8: Ilustração do Sistema Eclíptico de coordenadas.

O sistema eclíptico de coordenadas tem as seguintes características:

- Plano fundamental: o plano eclíptico.
- Coordenadas:

Longitude eclíptica(L) -Ângulo entre o círculo horário do ponto vernal e o meridiano da estrela, medido sobre a eclíptica a partir do ponto γ . Note-se que $L \in [0^{\circ}, 360^{\circ}]$.

Latitude eclíptica(β) - Ângulo entre o plano da eclíptica e a direcção do astro (dada pelo segmento de recta [OE] na Figura 4.8), medido ao longo do círculo horário do astro. Note-se que $\beta \in [-90^{\circ}, 90^{\circ}]$.

4.2.4 Transformação de coordenadas celestes

Para relacionar as coordenadas (α, δ) de um astro num sistema de coordenadas celestes A com as suas coordenadas (α', δ') num sistema de coordenadas celestes B é necessário conhecer a orientação do eixo polar do sistema de coordenadas B e qual a localização do seu ponto de referência.

Consideremos os ângulos ε , ϕ e ω tais que

- ε é o ângulo de inclinação do eixo polar do sistema de coordenadas B relativamente ao eixo polar do sistema de coordenadas A (ou seja, o ângulo entre os planos fundamentais de ambos os sistemas);
- ϕ é o ângulo entre o ponto de referência do sistema de coordenadas A e o ponto M, medido ao longo do plano fundamental do sistema de coordenadas A.
- ω é o ângulo entre o ponto M e o ponto de referência do sistema de coordenadas B, medido ao longo do plano fundamental do sistema de coordenadas B.

O significado destes ângulos está ilustrado na Figura 4.9.

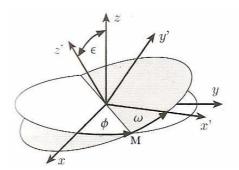


Figura 4.9: São necessários três ângulos ε , ϕ e ω , para especificar a orientação de um sistema de coordenadas relativamente a outro.

A transformação de coordenadas celestes que permite obter (α', δ') conhecidos (α, δ) é mais simples de se obter se considerarmos primeiro o caso em que $\phi = \omega = 0.8$

De acordo com a Subsecção 4.2.1, as coordenadas cartesianas de um ponto numa superfície esférica de raio unitário são dadas em coordenadas cartesianas por

$$\begin{cases} x = \cos \alpha \cos \delta \\ y = \sin \alpha \cos \delta \\ z = \sin \alpha \end{cases}$$

onde (α, δ) são as coordenadas desse ponto num dado sistema de coordenadas celestes.

Quando $\phi = \omega = 0$, o sistema de coordenadas B é obtido do sistema de coordenadas A através de uma rotação de um ângulo ε em torno do eixo dos xx.

Seja $R_x(\varepsilon)$ a matriz que representa a rotação mencionada anteriormente (ver Subsecção 4.1.7) e (x, y, z), (x', y', z') as coordenadas cartesianas de um ponto no sistema de coordenadas celestes A e no sistema de coordenadas celestes B, respectivamente.

⁸Note-se que este é o caso de transformação de coordenadas equatoriais em coordenadas eclípticas.

Temos que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_x(\varepsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Então, vem que

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon \\ z' = -y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha' \cos \delta' = \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha' \cos \delta' = \sin \alpha \cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \\ \sin \delta' = -\sin \alpha \cos \delta \sin \varepsilon + \sin \delta \cos \varepsilon \end{cases}$$

Obtivemos três equações para determinar duas incógnitas. No entanto, estas três equações são necessárias para distinguir as duas possíveis soluções de α' , uma vez que $\alpha' \in [0, 360^{\circ}[$.

Consideremos ϕ , ω quaisquer.

A transformação de coordenadas do sistema de coordenadas A no sistema de coordenadas B pode ser feita considerando-se três rotações distintas.

- Desloca-se o ponto de origem do sistema de coordenadas B até ao ponto M (ponto de intersecção dos círculos fundamentais dos sistemas de coordenadas A e B), ou seja, $\alpha' \to \alpha' + \omega$.
- Efectua-se uma rotação do ponto M até à origem do sistema de coordenadas A, ou seja, $\alpha \to \alpha \phi$.
- Efectua-se uma rotação dos eixos do sistema de coordenadas A segundo um ângulo ε em torno do eixo dos xx (uma vez que as duas rotações precedentes fizeram coincidir as origens do sistema de coordenadas A e B).

Assim, temos que

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha' + \omega)\cos\delta' \\ \sin(\alpha' + \omega)\cos\delta' \\ \sin\delta' \end{bmatrix} = R_x(\varepsilon) \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \phi)\cos\delta \\ \sin(\alpha - \phi)\cos\delta \\ \sin\delta \end{bmatrix}.$$

Donde, obtém-se a solução geral resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \cos(\alpha' + \omega)\cos\delta' &= \cos(\alpha - \phi)\cos\delta \\ \sin(\alpha' + \omega)\cos\delta' &= \sin(\alpha - \phi)\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon \\ \sin\delta' &= -\sin(\alpha - \phi)\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon \end{cases}$$

Capítulo 5

Astronomia no Ensino da Matemática

A Astronomia é uma ciência com forte cariz interdisciplinar. Esta intersecção com outras áreas do saber torna-a particularmente adequada para tema de possíveis actividades a desenvolver nas escolas (do Ensino Básico ou do Ensino Secundário). A Astronomia está fortemente relacionada com áreas como a Física, a Matemática, a Geografia, a Química, a Informática, a Geologia, a Biologia, entre outras.

Acresce que muitos estudantes sentem-se atraídos pelo estudo do Universo. Assim, a utilização de questões e problemas da Astronomia no Ensino permite que os professores aproveitem o fascínio natural dos estudantes por esta área. Diversos programas que, na União Europeia e nos Estados Unidos da América têm como objectivo contrariar a tendência que se poderia chamar de "desertificação" do estudo de áreas científicas, utilizam com sucesso temas da Astronomia. Um exemplo de grande sucesso é o projecto STAR ("Science Through its Astronomical Root") nos Estados Unidos da América.

Muitas das práticas realizadas na Astronomia recorrem à Matemática. Assim sendo, é relevante mostrar a aplicabilidade de vários conceitos e propriedades de conteúdos matemáticos na Astronomia. É importante que os estudantes se apercebam como a Matemática é uma ferramenta importante para a vida real. Com vista à prossecução destes objectivos propõe-se a realização de fichas de trabalho orientadas (ver secção 5.1).

As fichas de trabalho propostas têm por base a aplicação de conhecimentos matemáticos, adquiridos ao longo do Ensino Básico, na resolução de problemas relacionados com a Astronomia. Pretende-se deste modo ir ao encontro das directivas do Ministério da Educação, segundo o qual as aplicações e os problemas extraídos do mundo real estão no centro do programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico. Ambiciona-se aplicar conhecimentos matemáticos em problemas e situações ligados à Astronomia, nomeadamente:

- Ângulos suplementares, ângulos de lados paralelos, soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, critérios de igualdade de triângulos e rectas paralelas;
- Rotações, ângulos ao centro e arcos correspondentes, plano tangente a uma esfera num ponto e intersecção de uma recta e um plano;
- Razões trigonométricas;
- Proporcionalidade directa, conceito de média e conversão de medidas.

As fichas de trabalho são uma excelente oportunidade para estabelecer conexões entre diferentes temas da Matemática, permitindo que o estudante observe como os assuntos se combinam para abordar problemas da vida real.

São objectivos das fichas de trabalho:

- Construir e utilizar um instrumento de medida de ângulos (astrolábio) para determinar distâncias (subsecção 5.1.1 e 5.1.2).
- Determinar a latitude e a longitude de um lugar (subsecção 5.1.3 e 5.1.4).
- Determinar o perímetro de um meridiano da Terra (subsecção 5.1.5).
- Determinar a distância de uma estrela à Terra (subsecção 5.1.6).

Subjacente à exploração das fichas de trabalho está o desenvolvimento das seguintes competências, consideradas competências essenciais da Matemática, pelo Ministério da Educação, a desenvolver no Ensino Básico:

- A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas geométricos.
- A aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades.
- A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios.
- A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas áreas, nomeadamente na Astronomia.

Assim, através de problemas ligados à Astronomia, o estudante sistematizará conhecimentos básicos da Matemática e resolverá problemas geométricos, analisando figuras, efectuando medições, discutindo estratégias, justificando raciocínios e interpretando resultados.

Optamos por adoptar uma metodologia baseada em fichas de trabalho orientadas com o propósito de:

- Permitir que fossem os alunos a descobrir os resultados, fomentando deste modo um ensino por descoberta;
- Desenvolver a autonomia dos alunos;
- Desenvolver competências de resolução de problemas;
- Promover um ensino centrado no aluno.

A utilização das fichas de trabalho permite que os alunos progridam em pequenos passos, segundo um cuidadoso plano, ajudando-os a alcançar a solução dos problemas.

Parte do material das fichas de trabalho é baseado em ideias retiradas do portal da ESA (Agência Espacial Europeia) da secção ESA Education & Outreach ¹. A ESA tem dinamizado programas dirigidos a estudantes do Ensino Básico e Secundário. Estão disponíveis on-line, vários recursos didácticos, cobrindo áreas como, por exemplo, a medição de distâncias no Universo. A ficha de trabalho *Paralaxe e a distância de uma estrela à Terra* é baseada em propostas sugeridas nesse portal e a experiência de medir a altura de um edifício é análoga a uma emanada desse portal de medir a altura de uma árvore.

A ficha de trabalho *Determinação da Latitude e da Longitude* foi concebida aproveitando ideias de projectos emanados do Programa Ciência Viva. Lançado em 1996, o Ciência Viva tem como missão a promoção da cultura científica e tecnológica junto da população portuguesa.

¹http://www.esa.int/export/esaMI/Education

Por último, da ficha de trabalho Erat'ostenes e um meridiano da Terra fazem parte ideias retiradas da apresentação Medir o Mundo com Imaginação e Geometria do professor Nuno Crato 2 realizada no dia 12 de Março de 2007 na Universidade do Minho.

Apesar de algumas das fichas de trabalho sugeridas serem baseadas em projectos anteriores desconhecemos se estas experiências já foram realizadas em alguma escola e em caso afirmativo quais os resultados obtidos. Nos referidos projectos não encontramos informação sobre este facto.

²Inst. Sup. Economia Gestão, Lisboa e Sociedade Portuguesa de Matemática

5.1 Propostas para experiências pedagógicas

5.1.1 Astrolábio

Introdução

A ficha de trabalho *Astrolábio* envolve a utilização de instrumentos de medida para realizar construções geométricas, aplicando-se os seguintes conhecimentos matemáticos:

- Ângulos ao centro de uma circunferência;
- Arcos de uma circunferência;
- Mediatriz de um segmento de recta.

Ficha de trabalho

O astrolábio é um instrumento que serve para medir ângulos.

Há cerca de 500 anos, os navegadores portugueses usaram o astrolábio para se orientarem no mar. O astrolábio permitia determinar a sua posição na Terra, medindo a altura angular 3 do Sol.



Figura 5.1: Astrolábio.

CONSTRUÇÃO DE UM ASTROLÁBIO

Para a construção de um astrolábio é suficiente utilizar o seguinte material:

- régua e transferidor;
- compasso;
- cartão;
- x-acto;
- cola;

³ altura angular de um astro: é a amplitude do ângulo definido pela direcção do astro e o plano do horizonte.

- tubo de 15 cm de comprimento e 2 cm de diâmetro;
- parafuso e porca;
- um fio;
- um peso de chumbo.

Utilizando o material mencionado anteriormente pode-se construir um astrolábio seguindo o procedimento:

- Fazer um disco de 30 cm de diâmetro;
- Fazer um furo no centro do disco;
- Marcar os graus de declinação num quarto do disco;
- Fazer um ponteiro com 4 cm de largura e 25 cm de comprimento;
- Fazer um furo no centro do ponteiro;
- Montar as duas peças com um parafuso e uma porca para que o ponteiro possa rodar;
- Fazer dois quadrados em cartão com 4 cm de lado;
- Colar os quadrados no ponteiro à distância de 3 cm do centro do ponteiro;
- Colar o tubo sobre o ponteiro alinhado com o seu centro;
- Colocar um fio, no astrolábio, na marca dos 90°;
- Colocar um peso de chumbo no lado oposto ao fio para manter o astrolábio na vertical.

5.1.2 Altura de um Edifício

Introdução

A ficha de trabalho Altura de um edifício envolve os seguintes conhecimentos matemáticos:

- Razões trigonométricas (seno, co-seno e tangente);
- Equações do 1º grau a uma incógnita;

Ficha de trabalho

Pode-se usar um astrolábio para determinar, por exemplo, a altura de um edifício.



Figura 5.2: Edifício da Escola Básica 2 e 3 de Vila Verde.

Responda/explore as seguintes questões:

• Visualize, através do tubo do astrolábio, o topo do edifício.



Figura 5.3: Determinação da altura de um edifício.

- Meça a distância a que se encontra do edifício e a distância mínima entre os seus olhos e o chão.
- Usando razões trigonométricas, determine a altura do edifício.

Resolução

Sejam d a distância de uma pessoa ao edifício, h a altura do edifício e x a distância mínima dos olhos da pessoa ao chão.

Seja α a amplitude do ângulo obtido usando o astrolábio.

Representando a situação descrita na Figura 5.4.

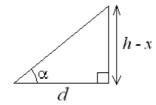


Figura 5.4: Esquema da determinação da altura do edifício.

Queremos determinar h.

Ora,

$$\tan \alpha = \frac{h-x}{d}$$
, isto é, $h=d\tan \alpha + x$.
Note-se que d , x e α são dados conhecidos.

5.1.3 Determinação da Latitude e da Longitude

Introdução

A ficha de trabalho *Determinação da Latitude e da Longitude* envolve os seguintes conhecimentos matemáticos:

- Plano tangente a uma esfera num ponto;
- Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo;
- Ângulos alternos internos;
- Proporcionalidade directa;
- Rotações;
- Média aritmética.

Ficha de trabalho

As coordenadas geográficas mais usadas para determinar a posição de um lugar sobre a superfície da Terra são a latitude e a longitude. A latitude de um lugar é o valor, em graus, que se percorre desde o Equador até esse lugar, para Norte ou para Sul.

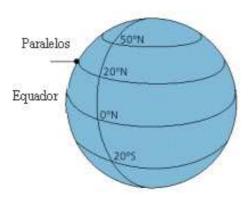


Figura 5.5: Globo com representação do Equador e de paralelos.

Na Figura 5.5 estão traçados o Equador, que é a linha de latitude zero, e os paralelos, que são circunferências paralelas à circunferência do Equador. Os pontos do Globo sobre o mesmo paralelo têm a mesma latitude.

A longitude de um lugar é o valor, em graus, que se percorre desde o Meridiano de Greenwich até esse lugar, para Este ou para Oeste.

Os círculos que passam pelos dois pólos (Norte e Sul) são designados meridianos da Terra. Na Figura 5.6 está traçado o Meridiano de Greenwich que é a linha de longitude zero, assim como outros meridianos.

Determinação da Latitude

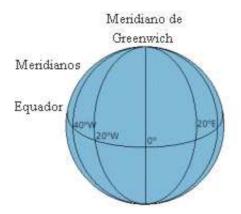


Figura 5.6: Globo com representação do Meridiano de Greenwich e de outros meridianos.

Calcular a latitude de um lugar seria muito simples se estivéssemos num dos equinócios⁴. Nesses casos a latitude é dada directamente por 90° menos a altura angular do Sol ao meio-dia solar.

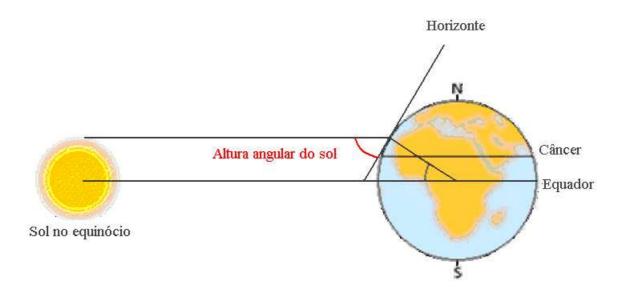


Figura 5.7: Esquema da Posição do Sol num equinócio.

Calcular a latitude de um lugar também seria muito simples se estivéssemos no solstício de Verão (hemisfério Norte). Nesse dia o Sol está na vertical do Trópico de Câncer, ao meio-dia solar. Como a latitude do Trópico de Câncer é 23° 30' N, para calcular a latitude do lugar onde nos encontramos bastaria subtrair 23° 30' à altura angular do Sol, e depois calcular como no dia de um equinócio.

Para determinar a latitude do lugar onde se encontra responda/explore as alíneas do Grupo I:

 $^{^4}$ Equinócio: momento em que o Sol está na vertical do equador. Ocorre no primeiro dia de Primavera e no primeiro dia de Outono.

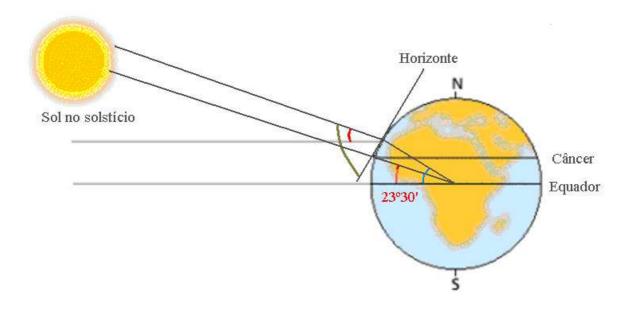


Figura 5.8: Posição do Sol no solstício de Junho.

Grupo I

- a) Quantos dias decorrem desde o equinócio de Primavera até ao solstício de Verão (hemisfério Norte)?
- b) Quanto varia, em média, a altura angular do Sol por dia desde o equinócio de Primavera ao solstício de Verão?
 - c) Quantos dias decorreram desde o equinócio de Primavera até ao dia de hoje?
 - d) Quanto variou a altura angular do Sol desde o equinócio de Primavera até ao dia de hoje?
- e) Utilize o astrolábio para medir, ao meio-dia solar, a altura angular do Sol. Qual é, então, a latitude do lugar onde se encontra?

DETERMINAÇÃO DA LONGITUDE

Para calcular a longitude de um lugar é necessário saber o instante em que ocorreu o meio-dia solar num local de referência e comparar com o instante a que ocorreu o meio-dia solar no lugar onde se encontra.

As coordenadas geográficas de Lisboa são as seguintes: 38°4'N e 9°8'W.

Suponhamos que o meio-dia solar em Lisboa ocorreu às 12h 34m 28s e no lugar onde se encontra ocorreu às 12h 31m 40s.

Para determinar a longitude do lugar onde se encontra responda/explore as alíneas do Grupo II:

Grupo II

- a) Qual a diferença horária entre o meio-dia solar do lugar onde se encontra e o meio-dia solar de Lisboa no dia de hoje?
 - b) Em qual dos dois lugares o meio-dia solar ocorreu, hoje, mais cedo?
 - c) Qual a variação do ângulo de rotação da Terra, por hora, em torno do seu eixo?
- d) Determine a variação do ângulo de rotação da Terra, em torno do seu eixo, correspondente à diferença horária que observou na alínea a)?
- e) Como se sabe a rotação da Terra, em torno do seu eixo, é no sentido Oeste-Este. Usando as alíneas anteriores determine a longitude do local lugar onde se encontra.

Resolução

Justifique-se primeiramente que se se estivesse num dos equinócios a latitude de um lugar seria dada directamente por 90° menos a altura angular do Sol ao meio-dia solar. Considerando a Figura 5.9 pretende-se mostrar que $\beta = 90^{\circ} - \alpha$.

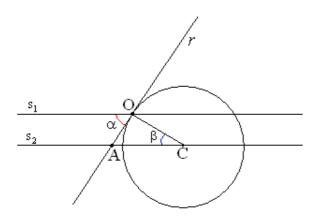


Figura 5.9: Esquema da determinação da latitude num equinócio.

Como a recta r é tangente à esfera de centro C e raio \overline{CO} vem que $C\widehat{O}A = 90^{\circ}$.

A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Em particular, $\widehat{OAC} + \beta + 90^{\circ} = 180^{\circ}$, isto é, $\widehat{OAC} = 90^{\circ} - \beta$.

Como as rectas s_1 e s_2 são paralelas vem que os ângulos de amplitude α e o ângulo são ângulos alternos internos.

Logo $\alpha = OAC$. Ou seja, $\alpha = 90^{\circ} - \beta$.

Justifique-se, agora, que se se estivesse no solstício de Verão (hemisfério Norte) a latitude de um lugar do hemisfério Norte seria dada por 90° menos a altura angular do Sol mais 23°30′. Considerando a Figura 5.10 pretende-se mostrar que $\varphi = 90^{\circ} - \beta + 23^{\circ}30'$.

Seja B um ponto do Trópico de Câncer.

Facilmente se conclui que $\alpha = \theta$

Então, como $\theta = 23^{\circ}30'$, vem que $\alpha = 23^{\circ}30'$. Considerando o ângulo de amplitude $\beta - \alpha$ podemos raciocinar como se se estivesse num dos equinócios. Então concluímos que $\beta - \alpha = 90^{\circ} - \varphi$.

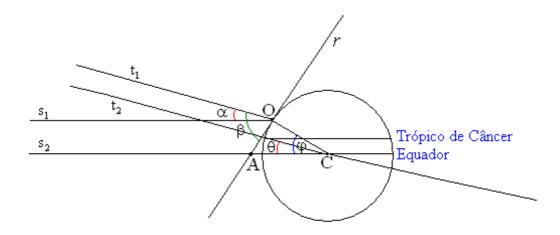


Figura 5.10: Esquema da determinação da latitude no solstício de Verão.

Ou seja,
$$\varphi = 90^{\circ} - \beta + 23^{\circ}30'$$
.

Respondamos às alíneas do Grupo I.

a) Suponhamos que decorre o ano de 2007.

Neste ano do dia do equinócio de Primavera ao dia do solstício de Verão decorrem 92 dias.

b) Seja x a variação média da altura angular do Sol por dia. Então,

$$x \times 92 = 23^{\circ}30'$$
.

Ou seja, $x \approx 15'19''$. Note-se que $1^{\circ} = 60'$ e 1' = 60''.

- c) Suponhamos que estamos no dia 26 de Abril de 2007.(o que importa é que estamos num dia compreendido entre o equinócio de Primavera e o solstício de Verão, no hemisfério Norte) Então desde o equinócio de Primavera até ao dia 26 de Abril decorreram 36 dias.
- d) Da alínea b) sabemos que a variação média da altura angular do Sol desde o equinócio de Primavera ao solstício de Verão é 23°30′. Da alínea c) sabemos que desde o equinócio de Primavera até ao dia 26 de Abril de 2007 decorreram 36 dias.

Logo, a variação da altura angular do Sol desde o equinócio de Primavera até ao dia 26 de Abril de 2007 foi, aproximadamente, $9^{\circ}11'44''$.

e) Suponhamos que ao meio-dia solar do dia 26 de Abril de 2007 a altura angular do Sol
é $58^{\rm o}.$

Subtraindo a variação total da altura angular do Sol desde o equinócio de Primavera até ao dia 26 de Abril de 2007 a 58º obtemos aproximadamente 48°48′16″.

Assim latitude do lugar é dada, aproximadamente, por $90^{\circ} - 48^{\circ}48'16''$. Ou seja, a latitude do lugar onde nos encontramos é, aproximadamente, $41^{\circ}11'44''$.

Respondamos às alíneas do Grupo II.

a) A diferença horária entre os dois lugares é 2m 48s.

- b) O meio-dia solar ocorreu mais cedo em Vila Verde.
- c) Sabe-se que a amplitude do ângulo de rotação da Terra em torno do seu eixo por dia é 360° .

Assim, por hora, a variação da amplitude do ângulo de rotação da Terra é 15°.

d) Para se determinar a variação da amplitude do ângulo de rotação da Terra, em torno do seu eixo, correspondente à diferença horária observada na alínea a), que foi 2m 48s basta, por exemplo, recorrer a uma regra de três simples.

Notemos que uma hora corresponde a 60 minutos.

Comecemos por converter 48 segundos em minutos. Obtemos 0,8 minutos.

$$\hat{A}$$
ngulos(graus) Tempo(minutos)
$$\begin{array}{cccc}
15 & & & 60 \\
x & & & 2,8
\end{array}$$

Concluímos que $x=\frac{15\times 2,8}{60}$, isto é, x=0,7. Logo a variação do ângulo de rotação da Terra, em torno do seu eixo, correspondente a 2m 48s é 42' (notemos que $0,7^{\rm o}=42'$).

e) Como no dia 26 de Abril de 2007 o meio-dia solar ocorreu mais cedo em Vila Verde (alínea b)) e a rotação da Terra em torno do seu eixo é no sentido Este-Oeste concluímos que Vila Verde se situa a Este de Lisboa.

Como a variação do ângulo de rotação da Terra, em torno do seu eixo, correspondente a 2m 48s é 42' concluímos que as longitudes de Vila Verde e Lisboa diferem 42'.

Assim, a longitude de Vila Verde é $(9^{\circ}8' - 42')$ W, ou seja, $8^{\circ}18'$ W.

5.1.4 A Estrela Polar e a Latitude

Introdução

A ficha de trabalho *Estrela Polar e a Latitude* envolve os seguintes conhecimentos matemáticos:

- Plano tangente a uma esfera num ponto;
- Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo;
- Amplitude de um ângulo raso.

Ficha de trabalho

É muito fácil determinar a latitude de um lugar usando a Estrela Polar.

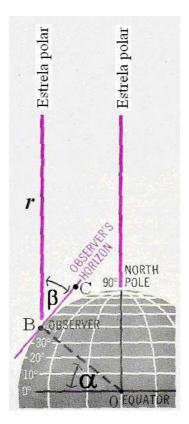


Figura 5.11: Determinação da latitude usando a Estrela Polar.

Usando a Figura 5.11 responda/explore as seguintes questões:

- Prolongue a recta t de forma a intersectar o equador no ponto A. Então, $B\widehat{A}O=90^{\circ}$. Porquê?
- O que pode concluir acerca de \widehat{ABO} ?
- O plano do horizonte é, em cada ponto, tangente à Terra. O que pode concluir acerca de $O\widehat{B}C$?
- Então, $\alpha = \beta$. Porquê?

Para medir a altura angular da Estrela Polar siga os seguintes pontos:

- Procure a Estrela Polar (numa noite sem nuvens);
- Pendure o astrolábio e aponte o ponteiro na direcção da Estrela Polar de modo que a visualize através do tubo;
- Indique a altura angular da Estrela Polar, ou seja, o valor, em graus, assinalado pelo ponteiro do astrolábio.
- Qual a latitude do lugar onde se encontra?

Resolução

Ponto 1: Prolongando a recta r obtém-se a Figura 5.12.

 $BAO = 90^{\circ}$ porque a direcção da Estrela Polar faz um ângulo de 90° com o plano do Equador.

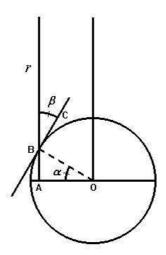


Figura 5.12: Esquema da situação da Estrela Polar.

Ponto 2: Considere-se o triângulo $\triangle[ABO]$.

como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° vem que $A\hat{B}O + \alpha + B\hat{A}O = 180$ °. Ou seja, $A\hat{B}O = 90$ ° – α .

Ponto 3: Pode-se concluir que $O\hat{B}C = 90^{\circ}$ porque um plano tangente a uma esfera é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Ponto 4: Observa-se facilmente que $\beta + O\hat{B}C + A\hat{B}O = 180^{\circ}$.

Assim $\beta=180^{\rm o}-A\hat{B}O-90^{\rm o}$, isto é, $\beta=90^{\rm o}-A\hat{B}O$.

Ora, do ponto 2, $A\hat{B}O = 90^{\circ} - \alpha$.

Logo, $\beta = 90^{\circ} - (90^{\circ} - \alpha)$.

Donde se conclui que a latitude de um lugar é igual à altura angular da Estrela Polar.

5.1.5 Eratóstenes e um meridiano da Terra

Introdução

A ficha de trabalho *Eratóstenes e um meridiano da Terra* envolve os seguintes conhecimentos matemáticos:

- Ângulos alternos internos;
- Perímetro de uma circunferência;
- Proporcionalidade directa;
- Arcos e ângulos ao centro de uma circunferência.

Ficha de trabalho

Eratóstenes nasceu em Cirene (actual Líbano), cerca de 276 a.C. e faleceu em Alexandria, cerca de 196 a.C. Como muitos sábios do seu tempo, foi astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta e matemático. Estes conhecimentos levaram-no a ocupar um cargo importante da Antiguidade: director da Biblioteca de Alexandria. Actualmente Eratóstenes é lembrado especialmente pela forma como mediu o perímetro de um meridiano da Terra.

Eratóstenes observou que ao meio-dia, no dia do Solstício de Verão, o Sol brilhava directamente no fundo de um poço, em Siena (actual Assuão, Egipto). Decidiu, então, fazer uma experiência. No solstício, quando o Sol passa na vertical de Siena, mediu a amplitude do ângulo que a direcção do Sol faz com a vertical de Alexandria, usando uma estaca, obtendo 7,2°.

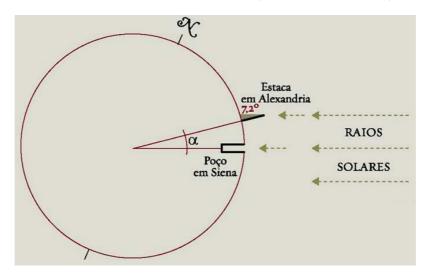


Figura 5.13: Esquema da medição efectuada por Eratóstenes.

Usando a Figura 5.13, justifica que $\alpha = 7, 2^{\circ}$.

Sabendo que Alexandria e Siena ficam à distância de cerca de 790 km e aproximadamente no mesmo meridiano, determine o perímetro de um meridiano da Terra obtido por Eratóstenes.

Resolução

Pretende-se justificar, primeiramente, que $\alpha = 7, 2^{\circ}$.

Como os raios solares são paralelos vem que os ângulos de amplitude α e de amplitude 7, 2º são



Figura 5.14: Posição de Alexandria e Siena no globo terrestre.

ângulos de lados paralelos.

Logo,
$$\alpha = 7, 2^{\circ}$$
.

Para se determinar o perímetro de um meridiano da Terra obtido por Eratóstenes basta, por exemplo, recorrer a uma regra de três simples.

$$\begin{array}{cccc} \text{Distância(km)} & & \text{\^Angulo(graus)} \\ 790 & --- & 7,2 \\ x & --- & 360 \end{array}$$

Concluímos que $x=\frac{360\times790}{7,2}$, isto é, x=39500. Logo o perímetro de um meridiano da Terra obtido por Eratóstenes foi 39500 km.

5.1.6 Paralaxe e a distância de uma estrela à Terra

Introdução

A ficha de trabalho *Paralaxe e a distância de uma estrela à Terra* envolve os seguintes conhecimentos matemáticos:

- Razões trigonométricas (seno, co-seno e tangente);
- Arredondamentos e valores aproximados;
- Proporcionalidade directa e proporcionalidade inversa.

Ficha de trabalho

Podemos determinar a distância aproximada de uma estrela à Terra, fazendo duas observações, com 6 meses de intervalo, isto é, a partir de dois pontos opostos da órbita da Terra. Nessas duas observações, visualizamos a estrela em duas direcções distintas relativamente às estrelas vizinhas e mais distantes, havendo assim um deslocamento aparente da estrela.

A paralaxe de uma estrela é metade da amplitude do ângulo definido entre a direcção da primeira observação e a direcção da segunda observação.

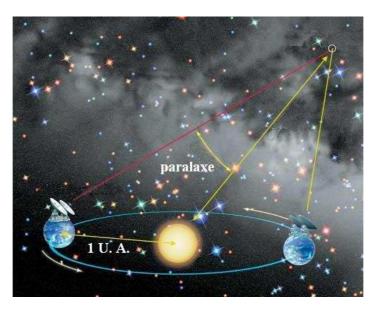


Figura 5.15: Esquema da determinação da distância de uma estrela à Terra.

Na Figura 5.15, 1 U. A. representa uma unidade astronómica, ou seja, a distância média da Terra ao Sol.

• Escreva uma expressão que relacione a distância da estrela à Terra com a amplitude da paralaxe.

A segunda estrela mais próxima da Terra é a estrela denominada Próxima de Centauro.

• Sabendo que o ângulo de paralaxe desta estrela é 0,764", determine a sua distância aproximada à Terra, em unidades astronómicas.

- Sabendo que 1 U.A. $\approx 1,5\times 10^8$ km , determine a distância aproximada da estrela *Próxima de Centauro* à Terra, em quilómetros.
- Sabendo que 1 parsec = 206265 U.A., determine a distância da estrela *Próxima de Centauro* à Terra, em parsecs.

Resolução

Pretende-se escrever uma expressão que relacione a distância da estrela à Terra com a amplitude da paralaxe.

Seja d a distância da estrela à Terra e α a amplitude da paralaxe.

Conclui-se facilmente que

$$\sin\left(\alpha\right) = \frac{1}{d}.$$

Sabe-se que o ângulo de paralaxe da estrela Próxima de Centauro à Terra é 0,764".

Então de 5.1.6 vem

$$d = \frac{1}{\sin\left(0,764\right)}.$$

Donde se conclui que $d \approx 269980$ U.A.

Determine-se agora a distância da estrela *Próxima de Centauro* à Terra em km.

Sabe-se que 1 U.A. $\approx 1,5 \times 10^8 \text{km}$.

Pelo que foi visto anteriormente vem $d\approx 4,0497\times 10^{13}$ km.

Por último, determine-se a distância da estrela *Próxima de Centauro* à Terra em *parsecs*.

Sabe-se que 1 parsec = 206265 U.A.

Assim $d \approx 1, 3 \ parsecs$.

Capítulo 6

Experiência pedagógica

Neste capítulo apresentam-se as conclusões de uma experiência pedagógica na Escola Básica 2 e 3 de Vila Verde e sugestões para futuras implementações das actividades propostas.

No seguimento do sugerido no capítulo 5 (Astronomia no Ensino da Matemática) foram implementadas, pelo Núcleo de Estágio de Matemática da Escola Básica 2 e 3 de Vila Verde, algumas das actividades propostas. Essa implementação consistiu na exploração das fichas de trabalho Astrolábio, Altura de um edifício, Determinação da Latitude e da Longitude e Eratóstenes e um meridiano da Terra, na turma E do nono ano, no 3º período do ano lectivo 2006/2007.

A turma em questão tem resultados académicos pouco satisfatórios a Matemática. Cerca



Figura 6.1: Fotografia do 9ºE da Escola Básica 2 e 3 de Vila Verde, ano lectivo 2006/2007.

de 70% dos alunos obteve nível 2, no 2º período do ano lectivo em causa. São, na sua maioria, alunos pouco motivados para a aprendizagem da Matemática e com o objectivo de terminar o seu percurso académico após a conclusão do ensino secundário. Revelam, em geral, uma visão muito compartimentada do conhecimento e dificuldades em percepcionar a aplicabilidade da Matemática. Não obstante, são alunos participativos e bastante interessados em actividades e desafios não rotineiros.

Perante este cenário, a realização desta experiência constitui uma oportunidade para modificar a atitude que estes alunos têm face à Matemática. Procura-se tirar partido do fascínio que a Astronomia habitualmente exerce nos alunos, motivando-os e mostrando-lhes a aplicabilidade da Matemática, bem como a interligação desta ciência com outras áreas, nomeadamente a Geografia e a Astronomia.

6.1 Implementação das Actividades

A implementação das actividades decorreu ao longo de um dia.

A ficha de trabalho Astrolábio foi a primeira a ser explorada e permitiu uma articulação com a História de Portugal. Muitos alunos mostraram ser conhecedores de que o astrolábio foi utilizado pelos navegadores portugueses, na época dos Descobrimentos, permitindo determinar as suas posições na Terra. No que concerne à tarefa proposta, construção do astrolábio, esta foi de fácil execução. Os alunos foram capazes de aplicar conhecimentos geométricos, leccionados nas aulas de Matemática, na construção deste instrumento de medição de ângulos. De forma autónoma, desenharam duas circunferências concêntricas e de seguida traçaram dois diâmetros perpendiculares da circunferência de maior raio traçando a mediatriz de um segmento de recta. Esta fase de construção foi muito positiva uma vez que os alunos foram capazes de, por iniciativa própria, utilizar conhecimentos matemáticos para a prossecução das tarefas propostas. Foi na fase de graduação do astrolábio que os alunos revelaram mais dificuldades. Concretamente, não conseguiram descobrir imediatamente o processo de graduação. De forma a superar essa dificuldade decidimos relembrar ângulos ao centro que, curiosamente, tinham sido recentemente leccionados na disciplina de Matemática. Perguntamos, então, como podiam realizar a graduação do astrolábio utilizando o transferidor. Nesta altura vários alunos conseguiram concluir que bastava marcar a amplitude de ângulos ao centro de uma circunferência com um raio menor ao desejado e seguidamente marcar a intersecção dos lados desse ângulo com a circunferência de maior raio. Conseguiram, neste momento, distinguir claramente o comprimento de um arco de circunferência e amplitude desse ângulo. O processo de construção procedente consistiu apenas num processo mecânico não oferecendo qualquer dificuldade.

De certo modo esta actividade motivou os alunos, que ficaram expectantes relativamente



Figura 6.2: Construção do Astrolábio por alguns alunos do 9°E.

às experiências em que utilizariam o astrolábio construído.

Posteriormente, num outro momento do dia, procedeu-se à exploração da ficha de trabalho Eratóstenes e um meridiano da Terra. Esta ficha foi aproveitada para dar a conhecer aos alunos uma personalidade importante da História da Matemática: Eratóstenes. Além do mais, esta ficha permitiu que os alunos contactassem com um exemplo histórico, o que é muito importante porque ajuda os alunos a apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através dos tempos. Os alunos ficaram surpresos com o problema proposto nesta ficha de trabalho especialmente pelo facto de notarem que este problema tinha já sido

resolvido há mais de dois mil anos. No que concerne à exploração desta ficha correu muito bem. Os alunos começaram por justificar porque é que $\alpha=7,2^{\rm o}$. Para eles chegarem às justificações pretendidas foi necessário, informar que os raios de Sol são paralelos. Assim considerando rectas paralelas os alunos conseguiram identificar que os ângulos de amplitude α e de amplitude $7,2^{\rm o}$ eram ângulos de lados paralelos pelo que concluíram que eram geometricamente iguais. No que diz respeito à segunda tarefa proposta, a determinação do perímetro de um meridiano da Terra, esta correu de forma excelente uma vez que, sem qualquer auxilio da nossa parte, os alunos identificaram de imediato um processo que lhes permitia chegar ao resultado pretendido. Aplicando a proporcionalidade directa, usando a conhecida regra de três simples, os alunos determinaram o perímetro de um meridiano da Terra. Para tal os alunos reconheceram que o comprimento de um arco de circunferência e a amplitude do ângulo ao centro correspondente variam na proporção directa um do outro. A exploração desta ficha correu muito bem uma vez que os alunos revelaram a capacidade de aplicar correctamente conhecimentos matemáticos, nomeadamente geométricos.

Seguidamente foi explorada a ficha de trabalho Determinação da Latitude e da Longitude na qual está eminente uma interligação entre a Matemática, a Geografia e a Astronomia. Inicialmente os alunos evidenciaram algumas dificuldades em conceitos ligados à Geografia. Após um breve esclarecimento tal contrariedade foi ultrapassada. Antecipando este problema, faziam já parte da ficha de trabalho algumas noções necessárias para a compreensão do método proposto para determinar a latitude e a longitude de um lugar. Essas noções foram percebidas pelos alunos, no entanto, eles não foram capazes de associá-los com o método de raciocínio necessário para a determinação da latitude num equinócio e no solstício de Verão no hemisfério norte. Foi então necessário proceder a um breve esclarecimento recorrendo a um esquema no quadro. De seguida procedeu-se à exploração das alíneas do Grupo I. Pretendia-se determinar a latitude da Escola Básica 2 e 3 de Vila Verde. A resolução destas alíneas por parte dos alunos correu globalmente bem. Não obstante, surpreendentemente, alguns alunos não foram capazes de identificar o dia do equinócio de Primavera e o dia de solstício de Verão. No que concerne à variação média da altura angular do Sol por dia e a variação total da altura angular do Sol não se verificou qualquer dificuldade. Relativamente à alínea e) tivemos de ser nós a medir a altura angular do Sol ao meio-dia solar. Tal deveu-se ao facto dos alunos não estarem disponíveis para o fazer pois decorriam aulas de outras disciplinas. Na restante resolução da alínea e) os alunos determinaram facilmente a latitude do lugar. Tal significou que os alunos tinham compreendido o método usado para a determinação da latitude num dia de equinócio e no solstício de Verão. A determinação da longitude revelou-se mais difícil. As duas primeiras alíneas correram de forma positiva apesar de alguns alunos mostrarem dificuldades, em determinar a diferença horária entre os dois locais, devido ao facto de não conseguirem subtrair correctamente segundos com segundos e minutos com minutos. Quanto à alínea c) e d) é apenas de salientar que estranhamente alguns alunos não conseguiram identificar que o ângulo de rotação da Terra por dia em torno do seu eixo era 360°. Após fornecermos essa informação a resolução decorreu facilmente. Os alunos conseguiram mais uma vez aplicar a proporcionalidade directa, usando a regra de três simples, não se esquecendo de converter horas em minutos na alínea d). A alínea e) foi onde os alunos mostraram maiores dificuldades. Relacionar o sentido de rotação da Terra (Oeste-Este) com o meio-dia solar revelou-se uma tarefa difícil. Tal impediu que os alunos conseguissem de forma autónoma determinar a longitude do lugar. Tivemos de explicar várias vezes o raciocínio usado porque alguns alunos manifestaram muitas dúvidas. Relativamente aos resultados desta ficha de trabalho é de salientar que as aproximações obtidas para as coordenadas geográficas de Vila Verde foram muito próximas dos valores reais. Os alunos ficaram surpreendidos com o facto de conseguirem determinar a latitude e a longitude de um lugar utilizando conhecimentos matemáticos. Por último, num terceiro momento, procedeu-se à realização da ficha de trabalho Altura de um edifício. Na realização da tarefa proposta os alunos usaram correctamente a trigonometria para determinar a altura do edifício da escola, obtendo resultados muito próximos da altura real do edifício. Na prossecução da tarefa proposta os alunos interpretaram de forma correcta o problema colocado. Representaram esquematicamente a situação por um triângulo rectângulo e identificaram que o comprimento de um dos lados desse triângulo era conhecido e que com o astrolábio podiam determinar a amplitude de um dos ângulos do triângulo. Sendo, então, conhecedores destes dados reconheceram que usando a tangente de um ângulo chegariam ao resultado pretendido. Assim fizeram. De seguida somaram ao valor obtido a distância mínima dos seus olhos ao chão. Foi curioso notar que não se esqueceram deste detalhe. E isto sem qualquer interferência nossa. A interpretação bem feita do problema permitiu uma fácil resolução do mesmo. Por tudo o que foi dito anteriormente esta ficha de trabalho decorreu com sucesso. Os alunos ficaram admirados com a forma como podiam aplicar a Matemática na resolução de problemas do quotidiano.



Figura 6.3: Medição da altura do edifício da escola.

6.2 Resultados de aprendizagem

Como consequência da exploração/implementação das fichas de trabalho anteriormente mencionadas obtiveram-se os seguintes resultados:

- Aplicação correcta de razões trigonométricas na resolução de problemas de índole prática, como por exemplo, na determinação da altura de um edifício;
- Conhecimento de uma técnica para determinar a latitude e longitude do lugar onde os alunos se encontravam;
- Uso adequado de variáveis directamente proporcionais na resolução da ficha de trabalho Latitude e Longitude de um meridiano e Eratóstenes e um meridiano da Terra;
- Aplicação adequada de conhecimentos geométricos para determinar o comprimento de um meridiano da Terra;

- Conversão eficiente de medidas e uso adequado de arredondamentos;
- Construção e utilização correcta de um instrumento de medida de ângulos, o astrolábio;
- Desenvolvimento da capacidade de enfrentar problemas recorrendo a conhecimentos matemáticos apropriados;
- Reconhecimento da aplicabilidade de ideias matemáticas a problemas correntes e relacionados com a Matemática;
- reconhecimento da utilidade do valor e da utilidade da Matemática.

A nível do processo de aprendizagem destaca-se, ainda, que os alunos estavam motivados, aprendendo com gosto e de forma participativa, desenvolvendo-se aprendizagens significativas e uma visão menos compartimentada do saber.

6.3 Análise crítica

Desta experiência pedagógica destacam-se vários aspectos positivos e vários aspectos negativos.

Dos aspectos positivos é de realçar:

- A participação e motivação dos alunos na realização de actividades não rotineiras;
- O interesse e a curiosidade dos alunos por assuntos relativos à Astronomia;
- A contribuição para uma atitude mais positiva face à Matemática;
- Compreensão dos aspectos matemáticos subjacentes aos problemas propostos.

Dos aspectos negativos é de salientar:

- Dificuldades de articulação entre conhecimentos matemáticos e conhecimentos da disciplina de Geografia na determinação da latitude e da longitude de um lugar;
- A realização da ficha *Astrolábio* em grupo uma vez que em determinados momentos alguns alunos foram apenas observadores e não actores da construção que estava a ser realizada;
- A implementação das fichas de trabalho num curto intervalo de tempo dificultando a interiorização e integração por parte dos alunos dos conhecimentos abordados.
- A não subdivisão da turma na realização da experiência Altura de um edifício.

6.4 Sugestões

Decorrente da experiência pedagógica realizada, surgem novas pistas que podem oferecer melhorias para futuras implementações.

Nessa sequência apresentamos as seguintes sugestões:

 Rever alguns conceitos básicos da área da Geografia antes da realização da ficha de trabalho Determinação da Latitude e da Longitude, nomeadamente, latitude, longitude, paralelos, meridianos, solstício e equinócio.

- Implementar as fichas de trabalho, ao longo do ano lectivo, nas aulas de Matemática, no momento em que os conteúdos a ser aplicados estejam a ser leccionados. Tal permitiria aprendizagens mais significativas e um maior contacto, dos alunos, com aplicações da Matemática.
- Utilizar um globo na implementação da ficha de trabalho *Determinação da latitude e longitude*. Tal facilitaria a compreensão de alguns aspectos, nomeadamente, da rotação da Terra em torno do seu eixo e da posição do Sol num equinócio e num solstício permitindo uma melhor articulação com a Matemática.
- Enfatizar mais a História da Matemática aquando da realização da ficha de trabalho *Eratóstenes e um meridiano da Terra*. Na experiência realizada observou-se que este tema desperta o fascínio dos alunos cativando-os para a aprendizagem.

6.5 Conclusão

As actividades realizadas com os alunos permitiram que eles se apercebessem da utilidade e aplicabilidade de vários conceitos leccionados nas aulas de Matemática ao longo do 3º ciclo. Os alunos puderam aplicar, aos dados obtidos nas experiências, alguns conceitos de Geometria e/ou Trigonometria. Aprenderam a partir da experimentação e resolução de problemas, onde foram protagonistas, e não por um processo meramente descrito. Utilizando esta estratégia conseguiu-se cativar os alunos de uma turma pouco motivada para a aprendizagem da Matemática obtendo-se bons resultados.

Quanto ao objectivo principal desta implementação foi atingido. Os alunos aperceberam-se das aplicações da Matemática em outras áreas, concretamente na resolução de problemas ligados à vida real e, em particular, à Astronomia. Tal permitiu que os alunos percepcionassem que a Matemática é uma ferramenta útil e indispensável para interpretar e compreender o real.

Bibliografia

- [1] Berry A. M. A., A short history of Astronomy, (New York: Dover Publications, Inc, 1977).
- [2] Chandrasekhar S., Newton's Principia for the common reader, (New York: Oxford University press inc., 1995)
- [3] Taylor J. R., Classical Mechanics, (Sausalito, California: University Science Books, 2005).
- [4] Dreyer J. L. E., A History of Astromony from Thales to Kepler, 2nd edition, (New York: Dover publications, Inc.,1953).
- [5] Estrada M. F. et al., *História da Matemática*, (Lisboa: Universidade Aberta, 2000).
- [6] Ferreira M. e Almeida G., *Introdução à Astronomia a às observações astronomicas*, 4.ª edição, (Lisboa: Plátano edições técnicas, 1997).
- [7] Fetter A. e Walecka J. D., *Theoretical Mechanics of Particles And Continua*, Mineola, (New York: Dover Publications, Inc., 1980).
- [8] Hirsch M. W. e Smale S., Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebrs, (Sam Diego, California: Academic press, 1974).
- [9] Kuhn T., A revolução copernicana, (Lisboa: Edições 70, 2002).
- [10] Landau L. D. e Lifshitz E. M., *Mechanics, Course of Theoretical Physics*, 3rd edition, (Moscow: Butterworth-Heinemann, 1976).
- [11] Lay D. C., Álgebra linear e suas aplicações, 2.ª edição, (Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos editora s.a., 1997).
- [12] Motz L. e Duveen A., Essentials of Astronomy, 2nd edition, New York: Columbia University Press, 1977
- [13] Murdoch D. C., *Álgebra Linear*, (Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos editora s.a., 1972).
- [14] Murdoch D. C., Geometria Analítica, 2.ª edição, (Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos editora s.a., 1977).
- [15] Oetiker T. et al, Uma não tão pequena introdução ao Latex, (2004).
- [16] Pinto D. M., Estabilidade do problema de três corpos restrito, Tese de Mestrado em Matemática, Área de Especialização em Ensino Universidade do Minho, (Braga, 2006).
- [17] Rios S., Álgebra linear e geometria vectorial, 2.ª edição, (Lisboa: Litexa, 1980).
- [18] Sá N. B., Astronomia Geral, (Lisboa: Escolar editora, 2005).

- [19] Smart W. M., Textbook on Spherical Astronomy, 6^{th} edition, (Cambridge: Cambridge University press, 1977).
- [20] http://www.oal.ul.pt
- $[21] \ http://www.esa.int/export/esaMI/Education$
- [22] http://www.cienciaviva.pt/latlong