GRAFOS HAMILTONIANOS
11^{o} ANO
Projecto de Estágio

ÁLVARA COSTA

Este trabalho foi orientado pelo Doutor Filipe Carteado Mena.

Universidade do Minho

Maio, 2006

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

> "Muitos fenómenos do dia-a-dia, em si mesmo triviais - por exemplo, as rachas numa velha parede, a forma de uma nuvem, o trajecto de uma folha a cair ou a espuma numa caneca de cerveja - são muito difíceis de formalizar, mas não será possível que uma teoria matemática surgida devido a fenómenos tão terra-a-terra possa acabar por ser mais rendível para a ciência?"
>
> René Thom

Muitas vezes, para resolver uma determinada situação problemática, temos tendência a fazer um esquema, ou um modelo, que nos facilite a organização das ideias. Com base nesses modelos, conseguimos visualizar melhor qual é a solução para o nosso problema ou definir uma estratégia para o resolver.

Em muitas situações o tipo de modelos utilizados são grafos, que não são mais do que esquemas onde se utilizam pontos ligados por linhas conforme a relação que é estabelecida no problema.

Por exemplo, uma rede metropolitana pode ser esquematizada num grafo, onde os vértices representam as estações e as linhas as ligações existentes entre as mesmas. Assim, por exemplo, determinar a forma mais rápida de chegar de uma estação à outra corresponderia a determinar o caminho mais curto entre dois vértices de um grafo, através de algoritmos desenvolvidos na teoria de grafos. Os sistemas informáticos que controlam essas redes metropolitanas, são baseados em programas criados fazendo a analogia entre a rede e o grafo associado, utilizando estruturas próprias da linguagem da programação que permite implementar esse grafo.

O objectivo deste trabalho é realizar uma abordagem à teoria de grafos Hamiltonianos.

No primeiro capítulo apresenta-se uma breve introdução ao tema "Grafos" e um pouco da sua história.

No segundo capítulo apresentam-se conceitos base importantes para a compreensão dos resultados principais apresentados neste capítulo sobre grafos Hamiltonianos e posteriormente para a compreensão das aulas planificadas sobre grafos Hamiltonianos dadas no capítulo 3.

Para além da planificação das aulas, no capítulo 3, são inicialmente dadas as orientações gerais do Ministério da Educação e no final é apresentado um teste que aborda vários temas sobre grafos.

No capítulo 4 apresenta-se uma reflexão sobre o tema "Grafos", na qual se aborda em que cursos e a altura que este tema é leccionado, as orientações dadas pelo Ministério para a leccionação deste tema e dificuldades na sua concretização.

1.1 História

Enquanto outros temas de matemática têm uma longa e gloriosa história, isto não acontece com a Teoria de Grafos.

A origem da Teoria de Grafos remonta ao séc. XVII. [14]

Pensa-se que um dos primeiros exemplos da utilização de grafos terá surgido devido às Pontes de Konigsberg. [14]

Na cidade de Konigsberg (actual Kalimingrado), antiga capital da Prússia Oriental, o rio Pregel circunda uma ilha e separa-se em duas variantes. O rio separa a cidade em quatro zonas que, no séc. XVII, estavam ligadas por sete pontes como na figura seguinte:

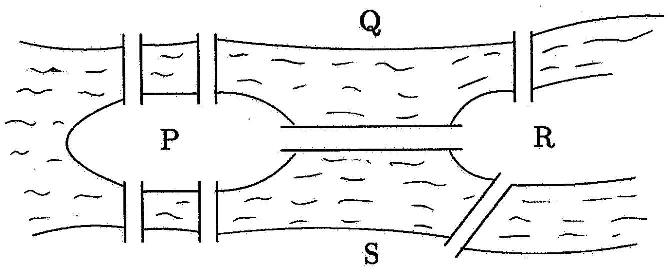

Figura 1.1: Esquema representativo das pontes de Konigsberg.

Conta-se que os habitantes da cidade, nos seus passeios, se divertiam a tentar encontrar um percurso que lhes permitisse atravessar cada uma das pontes, uma e uma só vez.

Em 1736, Leonard Euler (matemático suíço) escreveu um artigo, considerado o primeiro artigo da Teoria de grafos, onde demonstra a inexistência de um tal percurso [16]: Suponha-se que existe um percurso nas condições indicadas. O percurso começa numa zona e termina noutra (eventualmente a mesma). Em cada uma das zonas restantes (há, pelo menos, duas), sempre que se entra por uma ponte sai-se por outra diferente. Assim, essas zonas são extremidade de um número par de pontes. Ora, isto é absurdo pois cada zona é extremidade de um número ímpar de pontes.

Euler resolveu não só o problema das pontes de Konigsberg, mas deu um processo geral para, fixadas algumas regiões com os seus rios e pontes, saber se existe ou não um percurso passando por todas as pontes, percorrendo cada ponte uma só vez.

Dois séculos depois, em 1936, Déneskonig escreveu o primeiro livro de Teoria de Grafos. [27]

Desde então, num pequeno período de tempo aconteceram os principais desenvolvimentos da teoria de grafos, inspirados, sobretudo pela evolução das ciências ligadas aos computadores.

Capítulo 2

Grafos Hamiltonianos

2.1 Conceitos Base

2.1.1 O que é um grafo?

Definição 1 *Chama-se grafo a um par $G = (V, A)$, tal que $V \equiv V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é o conjunto dos vértices (não vazio e finito) e $A \equiv A(G)$ é o conjunto das arestas, a cada uma das quais corresponde um conjunto de elementos de $V(G)$ de cardinalidade 2, isto é, $A(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$, com $e_k = \{v_{ki}, v_{kj}\}$, para $k \in \{1, \ldots, m\}$. Por simplicidade de notação, uma aresta entre os vértices v e u será representada por vu.*

O número de vértices de G chama-se ordem de G, e representa-se por $\mid V(G) \mid$; o número de arestas de G representa-se por $\mid A(G) \mid$.

Definição 2 *Um grafo G diz-se simples se não existem arestas paralelas (mais do que uma aresta entre os mesmos dois vértices) nem lacetes (arestas com ambos os extremos no mesmo vértice).*

2.1.2 Grau de um vértice

Definição 3 *Dado um grafo G, uma aresta diz-se incidente no vértice v, se v é um dos seus extremos e dois vértices dizem-se adjacentes se tiverem uma aresta que os una.*

Definição 4 *Dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$ designa-se por grau ou valência de v e denota-se por $grau(v)$ (ou $grau_G(v)$) o número de arestas de G incidentes em v.*

Definição 5 *O conjunto de vértices adjacentes a um vértice v designa-se por vizinhança de v (ou conjunto de vizinhos de v) e denota-se por $N_G(v)$.*

Como consequência é claro que $grau_G(v) = \mid N_G(v) \mid$.

2.1.3 Subgrafos

Definição 6 *Dados dois grafos G e H, diz-se que H é um subgrafo de G e que G é um supergrafo de H quando $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$.*

Definição 7 *Um subgrafo H de um grafo G diz-se um subgrafo gerador se $V(H) = V(G)$, isto é, se H e G têm exactamente o mesmo número de vértices.*

Seja G um grafo. A eliminação de um subconjunto S de vértices de G é o subgrafo que contém os vértices de G que não estão em S, e as arestas de G não incidentes com os vértices de S. Este subgrafo denota-se por $G - S$.

Se $S = \{v\}$, representa-se apenas por $G - v$.

Seja G um grafo tal que u_i, v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ são pares de vértices não adjacentes de G. Então $G + u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n$ é o grafo obtido de G pela adição de arestas do conjunto $u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n$.

Se se considerar apenas dois vértices não adjacentes em G, então escreve-se $G + uv$, em vez de $G + \{uv\}$.

2.1.4 Caminhos e Ciclos

Definição 8 *Designa-se por passeio num grafo G, entre os vértices v_0 e v_k, toda a sequência de vértices e arestas da forma*

$$W : v_0, v_0v_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k-1}v_k, v_k,$$

com eventual repetição de vértices e arestas. Neste caso, os vértices v_0 e v_k designam-se por vértices extremos do passeio (sendo v_0 o vértice inicial e v_k o vértice final). Desta forma diz-se que W é um passeio de $v_0 - v_k$.

Pode-se fazer a representação omitindo as arestas, ou seja,

$$W : v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$$

Definição 9 *Um trajecto num grafo G entre os vértices v_0 e v_k é um passeio entre v_0 e v_k sem arestas repetidas (podendo, no entanto, existir vértices repetidos).*

Definição 10 *Um caminho entre os vértices v_0 e v_k é um passeio entre v_0 e v_k sem vértices repetidos.*

Definição 11 *Os trajectos fechados (onde o vértice final coincide com o inicial) designam-se por circuitos e os trajectos fechados, onde os vértices inicial e final são os únicos que coincidem, designam-se por ciclos.*

Geralmente, os caminhos, trajectos, passeios, circuitos e ciclos representam-se pela respectiva sequência de vértices.

Definição 12 *Sejam u e v vértices do grafo G. Diz-se que u é conexo com v se G contém um caminho $u - v$.*

Um grafo diz-se conexo se u é conexo com v para todo o par de vértices de G.

Dado qualquer vértice u do grafo G, $C(u)$ denota o conjunto de todos os vértices de G que são conexos com u. Então o subgrafo de G induzido por $C(u)$ chama-se componente conexa de G que contém u.

2.1.5 Grafos Especiais

Definição 13 *Seja $n \in N$. Chama-se grafo completo de ordem n, e representa-se por K_n , ao grafo simples (V, A) em que quaisquer dois dos seus vértices são adjacentes, isto é, todos os vértices têm grau $n - 1$.*

Definição 14 *Um grafo G diz-se bipartido se o conjunto dos seus vértices V puder ser dividido em dois subconjuntos (ou linhas) V_1 e V_2 tais que cada aresta em A tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Um tal grafo bipartido é usualmente representado por $G = (V_1, V_2, A)$. Quando $\mid V_1 \mid = n$, $\mid V_2 \mid = m$ e $\forall u \in V_1$ e $\forall v \in V_2, uv \in A(G)$ este grafo denota-se por $K_{n,m}$ e designa-se por grafo bipartido completo.*

2.2 Resultados Principais

Dos vários subtemas de Teoria de Grafos vamos centrar-nos nos grafos Hamiltonianos, assim denominados depois de William Hamilton, matemático irlandês, ter inventado um puzzle, que chamou "Icosian Game" [23]. O puzzle envolvia um dodecaedro no qual eram representados 20 vértices com o nome de cidades importantes do mundo. O objectivo do jogo era construir, usando as arestas do dodecaedro, uma "excursão" na qual se visita todas as cidades apenas uma vez e que termina na cidade de partida (que se repete neste caso).

Derivados deste jogo, surgiram muitos problemas, em que se admite que um caixeiro viajante tem de visitar n cidades diferentes iniciando e terminando a sua viagem numa das cidades. O objectivo final consiste em descobrir o percurso que torna mínima a distância total da viagem visitando cada cidade uma e uma só vez [3].

Este tipo de problemas são denominados por problemas do Caixeiro Viajante.

Pode-se representar este "sistema de transporte" por um grafo G cujos vértices correspondem às cidades, e cujas arestas correspondem às ligações entre as cidades apenas e só se a ligação junta as cidades correspondentes e não passa por nenhuma outra cidade específica.

A solução para este tipo de problema depende se G tem um ciclo que contém todos os vértices de G. Assim, através deste problema surgiram importantes conceitos.

Definição 15 *Seja G um grafo. Chama-se*

Caminho Hamiltoniano em G a um caminho, que passa por todos os vértices.

Ciclo Hamiltoniano em G a um ciclo que passa por todos os vértices de G.

Diz-se que G é um grafo Hamiltoniano se G tem um ciclo Hamiltoniano.

Definição 16 *Um grafo G simples chama-se grafo maximal não Hamiltoniano se não é um grafo Hamiltoniano mas a adição de qualquer aresta que ligue dois vértices não adjacentes forma um grafo Hamiltoniano.*

Exemplo 1

O grafo da figura 2.1 é um grafo Hamiltoniano porque contém o ciclo Hamiltoniano, u_1,u_2,u_5,u_4,u_3,u_1. O grafo da figura 2.2 não é Hamiltoniano.

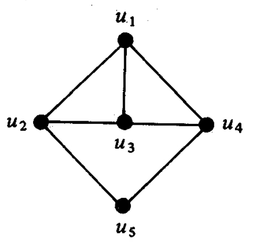

Figura 2.1: Grafo Hamiltoniano.

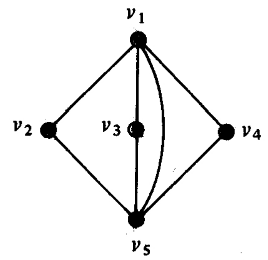

Figura 2.2: Grafo não Hamiltoniano.

Prova-se, por contradição, que não é um grafo Hamiltoniano. Suponhamos que é Hamiltoniano. Então, contém um ciclo Hamiltoniano C. Logo C contém todos os vértices do grafo, consequentemente, C contém v_2, v_3 e v_4. Cada um dos vértices v_2, v_3 e v_4 tem grau dois, donde C contém duas arestas incidentes com cada um destes vértices (v_2, v_3 e v_4). Temos que, o ciclo C, tem que conter as três arestas v_1v_2, v_1v_3,v_1v_4 (devido ao facto de os vértices v_2, v_3 e v_4 terem grau dois e serem todos adjacentes ao vértice v_1).

No entanto, um ciclo só pode conter duas arestas incidentes com um vértice no ciclo, isto porque, ao construir um ciclo no qual não se repete os vértices (excepto o inicial e o final), para "chegar" a um vértice apenas precisamos, e podemos, passar por uma aresta e depois podemos "sair" por outra para unir este vértice a outro qualquer.

Portanto, o grafo da figura 2.2 não pode conter um ciclo Hamiltoniano, o que contradiz a suposição de que é um grafo Hamiltoniano.

Verifica-se assim que a solução de problemas como o do Caixeiro Viajante depende se o grafo associado é Hamiltoniano.

Infelizmente, ainda não foi achado um método conveniente para determinar quais os grafos que são Hamiltonianos.

No entanto, existem algumas condições necessárias e algumas condições suficientes para a existência de ciclos Hamiltonianos num grafo.

Teorema 1 (Ore) *Seja G um grafo simples com ordem $n(\geq 3)$. Se para todos os pares de vértices u, v de G não adjacentes, $grau(u) + grau(v) \geq n$, então o grafo G é Hamiltoniano.*

Demonstração

Suponha-se que o grafo G satisfaz as condições do teorema mas não é um grafo Hamiltoniano. Junte-se arestas a G (sem juntar vértices) de forma a obter-se um super-grafo G^* de G tal que o grafo G^* é um grafo simples maximal que satisfaz a condição do teorema mas não é Hamiltoniano. Um grafo G^* deve existir pois G é um grafo não Hamiltoniano, enquanto o grafo completo em $V(G)$ é Hamiltoniano. Por esta razão para cada par u e v de vértices não adjacentes de G^*, $G^* + uv$ deve conter um ciclo Hamiltoniano C. Este ciclo C conterá certamente a aresta $e = uv$. Depois, $C - e$ é um caminho Hamiltoniano $u = v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n = v$ de G^* (Figura 2.3).

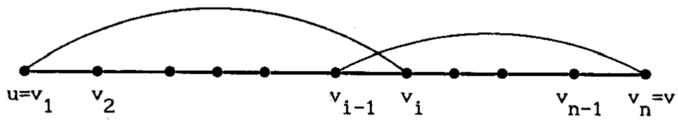

Figura 2.3: Caminho Hamiltoniano para a demonstração do teorema 1.

Agora, se $v_i \in N(u)$, $v_{i-1} \notin N(V)$; caso contrário, v_1, v_2, $\ldots$, v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, $\ldots$, v_{i+1}, v_i, v_1 seria um ciclo Hamiltoniano em G^*. Por esta razão, para cada vértice adjacente a u, existe um vértice de $V - \{v\}$ não adjacente a v. Mas depois

$$grau_{G^*}(v) \leq (n-1) - grau_{G^*}(u).$$

Isto dá que $grau_{G^*}(u) + grau_{G^*}(v) \leq n-1$, e então $grau_G(u) + grau_G(v) \leq n-1$, que é uma contradição. Logo o grafo G é Hamiltoniano. □

Teorema 2 (Dirac) *Seja G um grafo simples, de ordem $n(\geq 3)$, tal que $grau(v) \geq \frac{n}{2}$ para qualquer vértice v de G. Então G é um grafo Hamiltoniano.*

Demonstração

Suponhamos, por contradição que o resultado é falso. Então, para algum valor $n \geq 3$, existe um grafo não Hamiltoniano, em que todos os vértices têm, pelo menos, $grau\frac{n}{2}$.

Qualquer subgrafo regular considerado, isto é, com o mesmo número de vértices (fixados), também tem todos os vértices com, pelo menos, $grau\frac{n}{2}$, visto que qualquer super-grafo é obtido introduzindo mais arestas.

Assim haverá um grafo maximal de G, não hamiltoniano, com n vértices e $grau(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo o vértice v de G. Usando este G vamos obter uma contradição.

O grafo G não pode ser um grafo completo, visto que os grafos K_n são Hamiltonianos. Assim, existem dois vértices não adjacentes u e v em G .

Seja $G + uv$ o super-grafo de G obtido através da introdução de uma aresta entre u e v. Assim, visto que G é um grafo maximal não Hamiltoniano, $G + uv$ tem de ser um grafo Hamiltoniano.

Seja C um ciclo Hamiltoniano de $G+uv$, então tem que conter a aresta uv (caso contrário já teríamos um ciclo Hamiltoniano em G). Considere-se C tal que $C = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ com $v_1 = u$, $v_n = v$ (e a aresta v_nv_1 é a aresta uv). Tomemos

$S = \{v_i \in C$: existe uma aresta de u para v_{i+1} em $G\}$

e

$T = \{v_j \in C$: existe uma aresta de v para v_j em $G\}$.

Então $v_n \notin T$, caso contrário haveria uma aresta de v para $v_n = v$, ou seja, teríamos um lacete, o que é impossível pois o grafo é simples. Também $v_n \notin S$ (interpretando que $v_{n+1} = v_1$, pois obteríamos novamente um lacete, deste vez de u para $v_1 = u$. Assim $v_n \notin S \cup T$. Então, tomando $\mid S \mid$, $\mid T \mid$ e $\mid S \cup T \mid$, ou seja, o número de elementos de S, T e $S \cup T$ respectivamente, tem-se que:

$$\mid S \cup T \mid < n \tag{2.1}$$

Também, para toda a aresta incidente em u, corresponde precisamente a um vértice v_i em S. Assim

$$\mid S \mid = grau(u) \tag{2.2}$$

De forma similar

$$\mid T \mid = grau(v) \tag{2.3}$$

Para além disso, se v_k é um vértice que pertence a S e a T, então existe uma aresta e de extremidades u e v_{k+1} e uma aresta f de extremidades v e v_k. Assim tem-se que: $C' = v_1, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n, v_k, v_{k-1}, \ldots, v_2, v_1$ ou seja, ter-se-ía um ciclo Hamiltoniano em G, (Figura 2.4), o que contradiz o facto de G ser um grafo não Hamiltoniano.

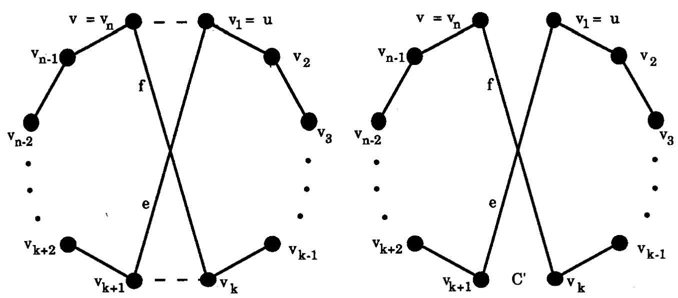

Figura 2.4: .

Isto mostra que não existe nenhum vértice v_k em $S \cap T$, ou seja, $S \cap T = \emptyset$.
Assim $\mid S \cup T \mid = \mid S \mid + \mid T \mid$.
Consequentemente, por (2.1),(2.2) e (2.3), tem-se que

$$grau(u) + grau(v) = \mid S \mid + \mid T \mid = \mid S \cup T \mid < n.$$

Isto é impossível em G, $grau(u) \geq \frac{n}{2}$ e $grau(v) \geq \frac{n}{2}$, e assim $grau(u) + grau(v) \geq n$. Absurdo, que resulta do facto de supormos que o grafo não é Hamiltoniano. $\square$

Note-se que o Teorema de Dirac é um caso particular do Teorema de Ore.

Exemplo 2

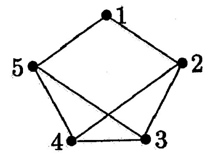

Figura 2.5: Grafo Hamiltoniano que não satisfaz as condições do T. Dirac.

A figura 2.5 mostra um grafo simples, de ordem 5 e para quaisquer vértices v_1, v_2 distintos e não adjacentes, $grau(v_1) + grau(v_2) \geq 5$. Logo, pelo Teorema de Ore, o grafo tem ciclos Hamiltonianos, por exemplo, C : $1, 2, 3, 4, 5, 1$.

No entanto, $grau(1) = 2 < \frac{5}{2}$, logo o grafo não satisfaz a condição indicada no Teorema de Dirac.

Nesse sentido o Teorema de Ore é mais geral do que o Teorema de Dirac;

A condição indicada no Teorema de Ore não é necessária para que um grafo tenha um ciclo Hamiltoniano e, consequentemente, também a condição indicada no Teorema de Dirac não é necessária.

Exemplo 3

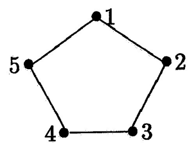

Figura 2.6: Grafo Hamiltoniano que não satisfaz as condições do T. Ore.

O grafo da figura 2.6 é um grafo simples com 5 vértices. Os vértices 1 e 3 são distintos e não adjacentes e $grau(1) + grau(3) = 2 + 2 < 5$, logo o grafo não satisfaz a condição indicada no Teorema de Ore. No entanto, tem ciclos Hamiltonianos, por exemplo, $C : 1, 2, 3, 4, 5, 1$. Este exemplo ilustra como a condição indicada no Teorema de Ore não é necessária para que o grafo tenha um ciclo Hamiltoniano.

Corolário 1 *Seja G um grafo de ordem p. Se $grau(v) \geq \frac{p-1}{2}$ para todos os vértices de G, então o grafo G contém um caminho Hamiltoniano.*

Demonstração
Se $p = 1$, então $G = K_1$, donde G contém um caminho Hamiltoniano.
Suponha-se que, $p \geq 2$ e defina-se $H = G + K_1$. Seja v o vértice de H que não está em G. Como a ordem de H é $p + 1$, resulta que $grau(v) \geq p$.
Além disso, para todo o vértice u de G

$$grau_H(u) = grau_G(u) + 1 \geq \frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2} = \frac{|\, V(H) \,|}{2}$$

Pelo Teorema de Dirac, H contém um ciclo Hamiltoniano C. Removendo-se o vértice v de C, obtém-se um caminho Hamiltoniano em G. $\square$

Uma condição necessária para que um grafo seja Hamiltoniano é a seguinte:

Teorema 3 *Seja G um grafo com n vértices. Se G é Hamiltoniano, então não existe $k \in N$ tal que G tem um subgrafo de ordem $n - k$ com mais de k componentes conexas.*

Exemplo 4

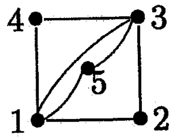

Figura 2.7: Grafo G sem ciclos Hamiltonianos.

$G_{\{2,4,5\}}$ é um subgrafo de G de ordem $3 = 5 - 2$ com $n > 2$ componentes conexas. Logo G não tem ciclos Hamiltonianos. Note-se que a condição indicada no Teorema anterior não é suficiente para que um grafo dado seja Hamiltoniano. Por exemplo, o grafo da figura 2.8 tem ordem 2 e não existe $k \in N$ tal que o grafo tenha um subgrafo de ordem $2 - k$ com mais de k componentes conexas. No entanto não é Hamiltoniano.

Figura 2.8: Grafo não Hamiltoniano

Teorema 4 *Seja $K_{n,m}$ o grafo bipartido completo com classes de n e m vértices, tal que $n, m \geq 2$. Se $m = n$, o grafo possui ciclos Hamiltonianos.*

Demonstração

Considere-se o grafo bipartido completo $K_{n,m}$ tal que $n \geq 2$.

Tem-se que nos grafos bipartidos, para $m, n \in N$, $\mid V(K_{n,m}) \mid= n + m$. Logo $\mid V(K_{n,m}) \mid= 2n$.

Por outro lado, nos grafos bipartidos completos, tem-se que cada um dos vértices de uma linha é adjacente a todos os vértices da outra linha, donde podemos concluir que no grafo bipartido $K_{n,m}$, $grau(v) = n$, para todos os vértices do grafo.

Donde, para todo o vértice v de $K_{n,m}$,

$$grau(v) \geq \frac{2n}{2}$$

Portanto, pelo Teorema de Dirac, $K_{n,m}$ é um grafo Hamiltoniano, ou seja possui um ciclo Hamiltoniano. $\square$

Teorema 5 *Seja $K_{n,m}$ o grafo bipartido completo com classes de n e m vértices, tal que $n, m \geq 2$. Se $\mid m - n \mid= 1$, o grafo possui caminhos Hamiltonianos e não possui ciclos Hamiltonianos.*

Demonstração

Considere-se o grafo bipartido completo $K_{n,m}$.

Suponha-se que $\mid m - n \mid= 1$, ou seja, que $m = n - 1$ ou $n = m - 1$.

Consideremos que $m = n-1$ (de forma similar prova-se o caso $n = m-1$).

Tem-se que $\mid V(K_{n,m}) \mid= n + m$, ou seja, a ordem do grafo é $n + m$.

Nos grafos bipartidos completos, cada um dos vértices de uma linha é adjacente a todos os vértices da outra linha, logo

- sendo n o número de vértices de uma linha, para todos os vértices v dessa linha tem-se $grau(v) = m = n - 1$, donde

$$grau(v) = n - 1 \geq \frac{n + m - 1}{2} = \frac{n + n - 1 - 1}{2} = n - 1,$$

- sendo m o número de vértices de uma linha, para todos os vértices u dessa linha tem-se $grau(u) = n$, donde

$$grau(u) = n \geq \frac{n+m-1}{2} = n-1,$$

então, pelo corolário 1, tem-se que o grafo $K_{n,m}$ possui um caminho Hamiltoniano.

Veja-se agora que o grafo não possui ciclos Hamiltonianos.

Considere-se o grafo bipartido $K_{n,m}$.

Suponha-se que se começa a construir um ciclo Hamiltoniano, por um dos vértices da linha com n vértices ($\{v_1, \ldots, v_n\}$).

Tem-se que $m = n - 1$.

Como os grafos são bipartidos completos, cada um dos vértices de uma linha é adjacente a todos os vértices da outra linha, de forma que começando o ciclo por v_1 de seguida pode-se escolher qualquer vértice da outra linha com m vértices ($\{u_1, \ldots, u_m\}$).

Escolha-se o vértice u_1. Agora pode-se escolher qualquer um dos vértices $v_2, \ldots, v_n$. Escolha-se o vértice v_2. Continua-se este procedimento de forma a passar por todos os vértices até se estar no vértice u_m. Como, neste caso, só se tem uma opção segue-se para o vértice v_n que se encontra na linha com n vértices.

Como não existe qualquer aresta a unir os vértices da mesma linha e já se passou por todos os vértices da outra linha, não é possível voltar ao vértice v_1.

O mesmo acontece quando se começa o ciclo por qualquer outro vértice. Assim, o grafo $K_{n,m}$ não possui ciclos Hamiltonianos. □

Teorema 6 *Seja $K_{n,m}$ o grafo bipartido completo com classes de m e n vértices, tal que $n, m \geq 2$. Se $\mid m - n \mid > 1$, o grafo não possui caminhos Hamiltonianos nem ciclos Hamiltonianos.*

Demonstração

Considere-se o grafo bipartido completo $K_{n,m}$.

Suponha-se que $\mid m - n \mid > 1$, ou seja, que $m > 1 + n$ ou $n > 1 + m$.

Considere-se que $n > 1 + m$ (de forma similar prova-se para o caso $m > 1 + n$).

Suponha-se que se começa a construir um caminho Hamiltoniano, por um dos vértices da linha com n vértices ($\{v_1, \ldots, v_n\}$).

Como os grafos são bipartidos, cada um dos vértices de uma linha é adjacente a todos os vértices da outra linha, então começando o caminho por v_1 de seguida pode-se escolher qualquer vértice da outra linha com m vértices ($\{u_1, \ldots, u_m\}$).

Escolha-se o vértice u_1. Agora pode-se escolher qualquer um dos vértices $v_2, \ldots, v_n$. Escolha-se o vértice v_2. Continua-se este procedimento de forma a passar por todos os vértices até se estar no vértice u_m. Neste caso ainda temos pelo menos duas opções, o vértice v_{n-1} ou o vértice v_n, siga-se para o vértice v_{n-1}. Como já se passou por todos os vértices da linha com m vértices, não se consegue ir para um vértice dessa linha, para além disso não existe qualquer aresta a unir os vértices da mesma linha, assim, não se consegue escolher um percurso que passe por todos os vértices.

Portanto o grafo $K_{n,m}$ tal que $\mid m-n \mid > 1$ não possui caminhos Hamiltonianos e consequentemente não possui ciclos Hamiltonianos. $\square$

2.3 Aplicações

Existem inúmeras situações em áreas tão distintas como a Geografia, a Química, as Ciências Sociais, a gestão de equipamentos Sociais, transportes e comunicações ou até mesmo a ciência da Computação que se podem representar por grafos.

Por exemplo, uma importante parte da Psicologia social é a dinâmica de grupos. Esta área centra-se na estrutura das relações que cada pessoa estabelece num grupo.

Designam-se como redes de comunicação, os canais e o modo como as pessoas se relacionam no interior de um grupo. Os três tipos de rede existentes (em estrela, em círculo e em cadeia) representam-se por grafos que reproduzem os modelos de transmissão de mensagens que se estabelecem entre os membros de um grupo. Os vértices representam as pessoas e a existência de uma aresta unindo dois vértices representa a relação de comunicação entre as pessoas. [7]

Em química, a fórmula estrutural de alguns compostos é elaborada usando um grafo em que os vértices representam átomos e as arestas representam as ligações. Por exemplo, os compostos C_2H_6 e B_2H_6 representam-se, respectivamente, por:

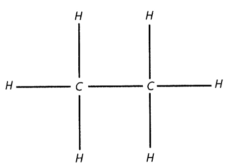

Figura 2.9: Fórmula de estrutura do Etano.

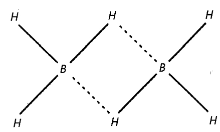

Figura 2.10: Fórmula de estrutura do diborado.

Os modelos de grafos contribuem na planificação das trajectórias dos serviços de distribuição - serviço postal, de limpeza de ruas, de recolha de lixo - na sequência de realização de tarefas. Este tipo de problemas, que apesar de serem situações completamente diferentes, podem ser incluídos nos problemas Eulerianos, ou seja, em problemas que envolvem as arestas de um grafo. Por ter sido enunciado pela primeira vez por um matemático chinês, Meigu Guan, em 1962, este tipo de problema também é conhecido como o Problema do Carteiro Chinês: [22]

"Imagine-se um carteiro que tem de fazer a distribuição da correspondência em determinada localidade. Será que consegue fazê-lo e regressar ao posto dos correios, passando apenas uma vez em cada rua? Caso não seja possível, qual é o menor percurso, isto é, o que repete menos arestas?"

A solução óptima para este problema, num grafo, é quando este admite um circuito de Euler, isto é, um circuito que passa uma única vez em cada aresta do grafo.

Procurar uma solução para problemas sobre grafos Eulerianos pode não ser simples, pois pode-se estar a procurar uma solução que nem sequer existe.

Para facilitar a resolução aplica-se o teorema de Euler, que diz que um grafo é Euleriano, isto é, admite um circuito de Euler, se e só se é conexo e todos os seus vértices têm grau par.

Se tal se verificar apenas se precisa de procurar um circuito. Para se procurar este circuito começa-se por seleccionar um vértice do grafo, que se estiver a considerar, que será o vértice inicial. Partindo deste vértice percorrem-se arestas do grafo, retirando todas as arestas já percorridas e todos os vértices que entretanto fiquem isolados. Se a aresta é uma "ponte" ligando os vértices v_1 e v_2, então só pode ser percorrida quando v_1 ou v_2 ou ambos fiquem isolados.

Mas pode não ser possível encontrar um circuito de Euler, ou seja, pode ser necessário repetir arestas (ruas) para regressar ao ponto de partida.

Nesses casos um processo possível é Eulerizar o grafo, que consiste em acrescentar ao grafo arestas por duplicação das já existentes, até que se obtenha um grafo conexo só com vértices de grau par. [22]

A melhor eulerização é aquela em que se acrescenta o menor número de arestas.

Os problemas do tipo do Caixeiro Viajante (PCV), que estão directamente ligados com grafos Hamiltonianos, têm uma grande aplicação em situações do quotidiano, principalmente em questões ligadas à Gestão e à Economia. Ao considerar-se, por exemplo, uma cadeia de supermercados que é abastecida a partir de um armazém único torna-se essencial minimizar os custos de transporte (tempo e/ou distância), pelo que são definidos percursos para os camiões abastecedores que tenham em conta estes aspectos (serão vistos alguns exemplos no Capítulo 3).

Uma outra situação que pode ser resolvida com a ajuda de grafos é o problema de colorir um mapa utilizando o menor número de cores possível. Desde meados do séc. XIX que esta questão foi abordada, havendo, desde essa época a convicção que são suficientes quatro cores para colorir qualquer mapa, desde que possa ser planificado [1], de tal forma que regiões com fronteira comum apresentem cores diferentes. Sabe-se contudo que há casos em que três cores, ou até mesmo duas, são suficientes para alcançar o objectivo. [23]

Para além disso, os grafos também têm uma vertente lúdica. A teoria de grafos é o ramo da matemática que estuda os labirintos e em muitas situações ajuda a definir estratégias de jogo.

Tem-se, por exemplo, o problema do cavalo do jogo de xadrez, proposto por Euler, que ocupou diversos matemáticos durante o séc. XIX.

Fica então aqui o desafio.

[1] Um mapa planificado dá sempre origem a um grafo planar, isto é, um grafo em que é sempre possível desenhar as arestas de tal forma que nunca se cruzem.

Será possível movimentar o cavalo (do jogo do xadrez) no tabuleiro de modo a que ele visite todas as casas do tabuleiro e volte ao ponto de partida, passando por cada casa uma e uma só vez? (existem várias soluções) [15]

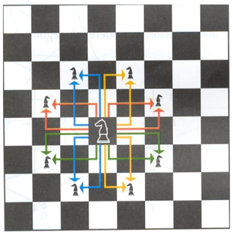

Figura 2.11: Jogo do Xadrez

Capítulo 3

Aulas

3.1 Programa da Matemática aplicada às Ciências Sociais

3.1.1 Visão geral dos conteúdos/temas

A disciplina de Matemática Aplicada nas Ciências Sociais destina-se aos Cursos Geral de Ciências Sociais e Humanas e ao curso Tecnológico de Ordenamento do Território. Para o Curso Geral trata-se de uma disciplina bienal da componente de formação específica com uma carga horária distribuída por 3 aulas de 90 minutos por semana. Para o Curso Tecnológico é uma disciplina trienal da componente de formação científico-tecnológica com uma carga horária semanal distribuída por 2 aulas de 90 minutos.

A distribuição das diferentes rubricas pelos diferentes anos de escolaridade, assim como o número de aulas recomendadas, é apresentada a seguir. No entanto, observe-se, que, excepto a Teoria Matemática das Eleições que funciona como módulo inicial, todas as outras rubricas podem ser ordenadas de outro modo se o professor entender que, nas condições em que trabalha, daí advém maior proveito para os estudantes.

A escolha dos temas propostos, como já se disse na introdução, teve em conta um dos objectivos prioritários da escola, que é o da educação para a cidadania. Esta educação subentende uma melhor compreensão do mundo que nos rodeia, pelo que é necessário dotar os jovens das ferramentas necessárias para mais rapidamente e em melhores condições responderem às inúmeras solicitações do meio em que se integram. Também se consideram recomendações internacionais que defendem insistentemente o desenvolvimento de temas de Matemática Discreta, particularmente para áreas de Ciências Sociais.

Os três temas seleccionados encerram objectivos diversos, permitindo desenvolver capacidades distintas e fazer aparecer diferentes conceitos matemáticos.

3.1.2 Sugestões Metodológicas Gerais

Convém ter presente que, neste programa, são determinantes as capacidades de usar a matemática em situações reais, formular e resolver problemas e comunicar ideias matemáticas. Menos importantes são o conhecimento e a utilização de rotinas e técnicas de cálculo e o domínio dos conceitos como objectos matemáticos. Neste contexto, o maior ou menor aprofundamento de cada rubrica dependerá das opções que o professor fizer tendo em conta as características dos estudantes e os recursos disponíveis, analisando cuidadosamente quais as rubricas onde, nessas condiçõoes, poderá desenvolver com os estudantes projectos mais significativos (no sentido de ajudar os estudantes a desenvolver as capacidades já mencionadas).

Assume grande importância a interpretação de problemas realistas e a investigação que se faz nas fontes e nas instâncias de decisão para as diversas situações. É importante o professor apresentar ou sugerir situações que possam vir a ser objecto de estudo e em cada oportunidade esclarecer a matemática necessária para as diversas situações e para a comunicação inteligente e justificada das decisões. Se é verdade que os estudantes devem usar correctamente o vocabulário e simbologia específica da Matemática, também se deve ter em conta que estes não são o centro da aprendizagem nem devem ser confundidos com rigores formais que a desvirtuem.

A abordagem dos temas de Estatística, Probabilidades e Inferência Estatística aplicada ás Ciências Sociais é feita neste programa de uma forma muito virada para os interesses e necessidades dos estudantes dos Cursos em que esta disciplina se integra. É por isso que estes temas são tratados com muitos exemplos e detalhe metodológico.

O estabelecimento de conexões entre os diferentes temas fornece oportunidades ao estudante de observar como os assuntos se poderão combinar para abordar problemas mais complexos e permitirá revisitar temas já estudados. Para dar aos estudantes uma visão mais completa da Matemática, os professores poderão estabelecer conexões com outros temas abordados no terceiro ciclo, nomeadamente com a Geometria. As ferramentas próprias deste tema (material de desenho, software de geometria dinâmica) poderão então ser mobilizadas e poderá ser dado tempo aos estudantes para recordarem o seu uso.

Não há formação matemática equilibrada sem uma referência à História da Matemática. Um estudante precisa de saber que as descobertas matemáticas se sucedem a um ritmo vertiginoso e que, juntamente com todas as das outras áreas do saber, têm contribuído ao longo dos tempos para a compreensão e resolução dos problemas do Homem. Como a maioria das rubricas deste programa está relacionada com matemática contemporânea, é natural que a maioria das referências inclua trabalhos matemáticos mais recentes; não há qualquer inconveniente com esse facto, pelo contrário, tal mostra a vitalidade da Matemática. Assim, sempre que possível, devem ser usados exemplos históricos interessantes (uso de estatísticas pela enfermeira Florence Nightingale, análises de Malthus sobre o crescimento populacional, casos célebres de utilização incorrecta da Estatística, controvérsias eleitorais, etc).

Avaliação

A natureza da disciplina e, em particular, o tipo de trabalho que se pretende desenvolver com os estudantes implica uma alteração nos instrumentos de avaliação. As provas escritas (ou testes) tradicionais de questionamento sobre os conceitos matemáticos em si mesmos ou com exigência de prova do manejo de técnicas matemáticas ou de manipulação da simbologia matemática perdem sentido e oportunidade como instrumentos privilegiados para as tarefas de avaliação. A actividade dos estudantes e o aproveitamento que se pretende verificar são mais cabalmente medidos com a apreciação dos trabalhos de grupo e individuais realizados, sendo importante que assumam diversos formatos: composições e notas de leitura, relatórios de actividades desenvolvidas, preparação de apresentações e participação em debates com temas seleccionados adequadamente ligados aos assuntos de ensino.

3.2 Desenvolvimento do tema " Modelos de grafos" e indicações metodológicas

Modelos de Grafos

Pretende-se que os estudantes interpretem algumas situações de sistemas de distribuição e explorem diversas soluções para problemas que lhes sejam postos em cada situação. As situações a escolher devem poder ser representadas na essência por um sistema de pontos e de linhas unindo alguns desses pontos. Está fora de questão uma introdução teórica sistematizada da teoria de Grafos, mas alguns dos raciocínios comuns aos teoremas e problemas dos circuitos de Euler e Hamilton não devem ser evitados. Definições e notações podem ser introduzidas na medida que forem sendo necessárias e úteis para economia e clareza da linguagem e devem ser tanto quanto possível inteligíveis no âmbito das situações em estudo.

Os problemas históricos podem ser apresentados nas aulas, mas podem servir para desenvolver actividades de consulta e projectos. Se os exemplos apresentados se referirem a situações concretas nas comunidades, as propostas de solução podem ser apresentadas aos responsáveis. Desse modo, desenvolvem-se competências úteis para a intervenção cívica ao mesmo tempo que se desenvolvem competências fundamentais ao nível da comunicação envolvendo matemática.

Sistemas de distribuição - postal, de limpeza de ruas e recolha de lixo, de patrulhamento e controle de equipamentos sociais

Objectivos a atingir:

- Desenvolver competências para determinar o essencial de uma determinada situação de modo a desenhar esquemas apropriados a uma boa descrição;
- Procurar modelos e esquemas que descrevam situações realistas de pequenas distribuições;
- Tomar conhecimento de métodos matemáticos próprios para encontrar soluções de problemas de gestão;
- Encontrar estratégias passo a passo para encontrar possíveis soluções;
- Descobrir resultados gerais na abordagem de uma situação.

O professor pode apresentar situações que sejam modeladas por grafos (sistemas de distribuição - carteiros, etc; patrulhamento e controle de equipamentos sociais - parcómetros, etc; sistemas de limpeza de ruas e de recolha de lixo, etc). Níveis crescentes de exigência nos problemas apresentados podem servir para introduzir noções e técnicas. Um problema de patrulhamento ou distribuição postal pode ser proposto sobre um mapa desde encontrar quaisquer caminhos possíveis, passando por encontrar caminhos sem repetir arestas, até à necessidade de caminhos sem repetições a começar e a acabar num mesmo ponto.

As noções de vértice, aresta, caminho, circuito são óbvias. Obrigatórias são também as condições para que um grafo admita circuitos de Euler e a procura de algoritmos para encontrar uma solução com o mínimo de repetições na falta de uma solução sem repetições. Podem ser introduzidos sentidos nas ruas (arestas) e a grafos orientados.

Planos de viagens, problemas de caixeiros viajantes, localização de sedes ou grandes equipamentos que carecem de abastecimento a partir de vários pontos de uma região

Objectivos a atingir:

Para além de prosseguir os objectivos já definidos para a primeira parte do tema, há objectivos especifícos, a saber,

- Para cada modelo, procurar esquemas combinatórios (árvores) que permitam calcular pesos totais de caminhos possíveis;
- Encontrar algoritmos decisões passo a passo para encontrar soluções satisfatórias;
- Discutir sobre a utilidade e viabilidade económica (e não só) da procura das soluções óptimas.

Apresentam-se algumas situações que sejam modeladas por grafos de vértices, em que o que interessa é visitar todos os vértices de preferência sem repetições e com partida e chegada do mesmo ponto, isto é, afigura-se obrigatória uma abordagem dos circuitos hamiltonianos e um exemplo para introdução do Problemas do Caixeiro Viajante. Também é absolutamente necessário o trabalho com "árvores" que visa facilitar as somas de pesos atribuídos nas arestas de modo a ser possível comparar os pesos totais das várias soluções. A procura de algoritmos próprios para obter soluçõoes aceitáveis é também um exercício de importante utilidade formativa.

A atribuição de pesos nas arestas deve ser acompanhada da discussão dos seus diversos sentidos maior número de quilómetros, maior consumo de combustível, mais poluição, menos lucro, preços mais altos e isso deve ser discutido com situações que envolvam a localização dos grandes armazéns de uma cadeia de distribuição comercial, utilizando uma frota de camiões num dado território, localização de equipamentos sociais (unidades de tratamento de resíduos, aterros sanitários, etc) introduzindo os factores das deslocações e da combustão no tráfego, etc.

3.3 Planificação das aulas

3.3.1 Plano de aula nº 1

Sumário

Introdução aos Grafos Hamiltonianos.
Ciclos Hamiltonianos.
Resolução de exercícios.

Tópico:

Comentários

Unidade: Modelos de Grafos.

- Grafos Hamiltonianos.
- Ciclos Hamiltonianos.

Objectivos:

- Desenvolver competências para determinar o essencial de uma determinada situação de modo a desenhar esquemas apropriados a uma boa descrição.
- Procurar modelos e esquemas que descrevam situações realistas de distribuições.
- Utilizar grafos que resolvam problemas em contextos reais.
- Indicar condições necessárias para a existência de ciclos Hamiltonianos (Teorema de Ore e de Dirac).
- Identificar grafos Hamiltonianos.
- Indicar ciclos Hamiltonianos.

Formato de ensino:

- Discussão e exploração no grupo turma.

Actividade motivacional:

1. A mãe do Tiago torceu um pé, mas as compras para o jantar têm de ser feitas. A lista que a mãe do Tiago fez contempla idas às seguintes lojas: talho (T), mercearia (M), frutaria (F) e padaria (P). O Tiago também

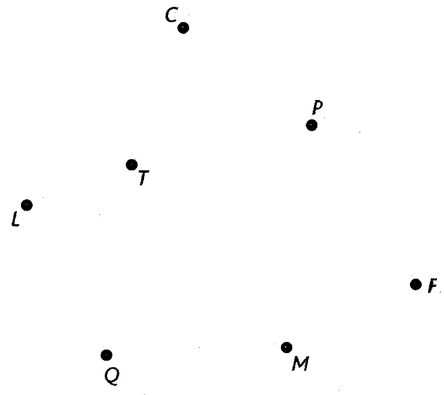

Figura 3.1: G_1

precisa de um dossier novo e de dois livros para a escola e, por isso, tem de passar no Quiosque (Q) e na livraria (L). [5]

Tomemos como pontos as lojas a que o Tiago tem de ir:

1.1) Desenha um trajecto que o Tiago poderá percorrer de modo a visitar cada um desses locais e regressar novamente a casa (C):

1.1.1) sem restrições;

1.1.2) sabendo que quer ir primeiro à livraria;

1.1.3) sabendo que só vai ao talho imediatamente antes de ir para casa.

Exploração:

- Começa-se por alertar os alunos que até à data, a análise que tem sido realizada tem focado as arestas de um grafo, isto é, a procura de percursos sobre as arestas em função do que se pretende encontrar. Mas que esta análise também se pode concentrar nos vértices de um grafo, isto é, na procura de percursos que exijam a visita a determinados vértices e não a arestas, igualmente sem repetições, e sem nos preocuparmos com as arestas que podem ser ou não repetidas.

- Resolve-se a actividade motivacional, concluindo que se compararem os grafos que podem ser desenhados para cada um dos casos, e também com outros que eles possam ter desenhado, os grafos embora representem percursos diferentes, todos começam e acabam no mesmo vértice e passam por todos os outros uma única vez. A este tipo de percurso chama-se ciclo Hamiltoniano.

O professor deve resolver esta actividade conjuntamente com os alunos, e embora aproveitando as sugestões dos alunos, ter o cuidado de estabelecer percursos diferentes para cada uma das questões.

- Dá-se a seguinte definição:

Definição:

Num grafo $G = (V, A)$, chama-se ciclo de Hamilton (ou Hamiltoniano) a um ciclo que passa por todos os vértices de G.

Um grafo diz-se Hamiltoniano se nele se pode encontrar, pelo menos, um ciclo de Hamilton.

- Refere-se, a título de curiosidade, que o primeiro a estudar estes conceitos foi o matemático irlandês, William Hamilton, e daí o nome.

- Resolve-se o exercício 1 das actividades práticas.

- Refere-se que embora se conheça um processo para averiguar se um grafo conexo tem, ou não, um ciclo de Euler, não existe nenhum processo que permita dado um grafo qualquer, verificar de imediato se existe ou não um ciclo Hamiltoniano. Mas existem, alguns tipos de grafos, com características próprias, que permitem afirmar se possuem ou não ciclos Hamiltonianos.

  Por exemplo, sabe-se que:

  Num grafo com pontes não existem ciclos Hamiltonianos.

  Num grafo completo existem sempre ciclos Hamiltonianos.

O professor explica de forma intuitiva estas noções aos alunos. Os alunos devem registar no caderno estas noções.

- Refere-se, que existem, algumas condições que podem ser utilizadas para determinar se alguns grafos contêm ciclos Hamiltonianos.

Teorema (Ore):

Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo e simples com $n(\geq 3)$ vértices tal que $grau(u) + grau(v) \geq n$ para quaisquer vértices, u e v de G distintos e não adjacentes.

Então G é um grafo Hamiltoniano.

Teorema (Dirac):

Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo e simples com $n(\geq 3)$ vértices, tal que $grau(v) \geq \frac{n}{2}$ para qualquer vértice v de G.

Então G é um grafo Hamiltoniano.

- Alerta-se os alunos para o facto do teorema de Dirac ser uma conclusão do teorema de Ore e de nem sempre estes resultados serem equivalentes. Para além disso os teoremas indicam uma condição suficiente mas não necessária para que um grafo contenha um ciclo Hamiltoniano, exemplificando com o grafo da figura 3.2:

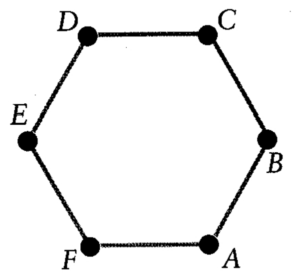

Figura 3.2: G_2

Tem-se que :

- $n = 6$;

- o ciclo A, B, C, D, E, F, A é Hamiltoniano e, por exemplo, $grauA + grauC = 4$ e 4 não é maior do que 6. O teorema não diz que se um grafo conexo e simples com $n \geq 3$ vértices tem ciclo de Hamilton, então a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes deve ser maior ou igual a n.

- Propõe-se que os alunos realizem os exercícios das actividades práticas.

Actividades práticas:

1. Considera os grafos da figura 3.3 e da figura 3.4. [3][7] Averigua se algum deles é ou não um grafo Hamiltoniano .

Os alunos devem concluir que o grafo G_3, não é de Hamilton pois se começarmos o ciclo em A, C, D ou E, passa-se necessariamente em B duas vezes, para se visitar os vértices A, C, D e E. Se começarmos o ciclo em B, para visitarmos A, C, D e E, vamos passar em B três vezes. O grafo G_4 é de Hamilton e podem considerar, por exemplo, o ciclo A, C, D, B, F, E, A.
O professor, deve reforçar a ideia que nos ciclos Hamiltonianos não é necessário percorrer todas as arestas do grafo.

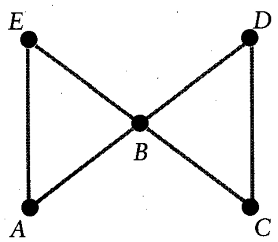

Figura 3.3: G_3

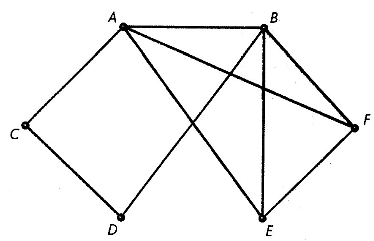

Figura 3.4: G_4

2. Considerando os grafos das figuras 3.5 - 3.9 desenha, se existir, um ciclo Hamiltoniano. Quando este não existe explica porquê. [7], [8]e[3]

Os alunos devem concluir que no grafo G_5 existe por exemplo o ciclo C: C, E, G, H, F, D, B, A, C. No grafo G_6, no G_8 e no G_9 não existe nenhum ciclo Hamiltoniano. No grafo G_7 pode-se, por exemplo, considerar o ciclo Hamiltoniano C: E, F, G, C, B, A, D, E.

3. Supõe que existem sete companhias de autocarros turísticos na área da cidade do Braga, cada uma realizando visitas diárias a não mais do que

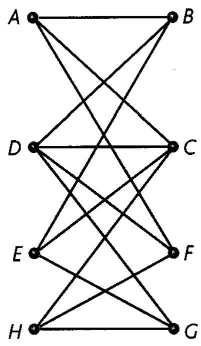

Figura 3.5: G_5

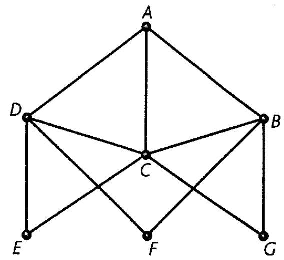

Figura 3.6: G_6

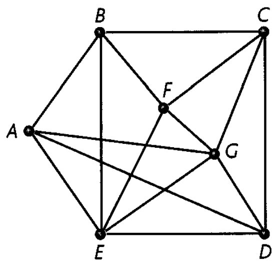

Figura 3.7: G_7

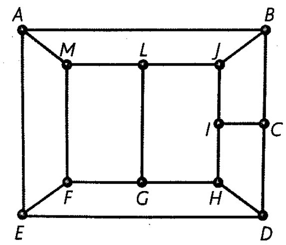

Figura 3.8: G_8

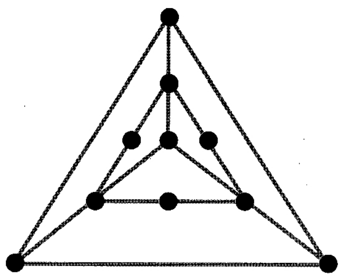

Figura 3.9: G_9

três locais marcantes desta região: Sameiro, Bom Jesus, Sé de Braga e Mosteiro de Tibães. As companhias acordaram entre si que não visitariam o mesmo local no mesmo dia. A seguir estão indicados os locais que cada uma das companhias se propõe visitar. [10]

Companhia 1 - apenas visita o Bom Jesus.
Companhia 2 - visita o Sameiro e o Bom Jesus.
Companhia 3 - visita a Sé de Braga.
Companhia 4 - visita o Sameiro e a Sé de Braga.

Companhia 5 - visita o Bom Jesus e o Mosteiro de Tibães.
Companhia 6 - visita o Mosteiro de Tibães e a Sé de Braga.
Companhia 7 - visita o Sameiro e o Mosteiro de Tibães.

Para o exercício 3.1, uma solução possível, por parte dos alunos, é num mesmo dia sair: companhia 1, companhia 3 e companhia 7; companhia 2 e companhia 6; companhia 5; companhia 4. É preciso um número mínimo de três dias.

3.1) Em conjunto resolveram estabelecer um calendário no qual cada companhia tenha assegurada a sua participação. Esse calendário também assegura que cada local é visitado pelo menos uma vez por dia. Qual o número mínimo de dias a serem preenchidos em tal calendário?

3.2) Se a companhia 5 decidir passar também a visitar a Sé de Braga, será possível manter o número de dias no calendário que elaborou?

Para o exercício 3.2 devem concluir, se escolheram o calendário anterior, que não é possível manter o número de dias no calendário elaborado.

Trabalho de casa:

1. Na altura das férias, o João decidiu ocupar o tempo a trabalhar e assim ganhar algum dinheiro. Foi fazer distribuição de jornais e revistas na sua vila. Considere o grafo da figura 3.10, em que os vértices são locais de distribuição e as arestas são as vias de acesso possível entre cada ponto. [5]

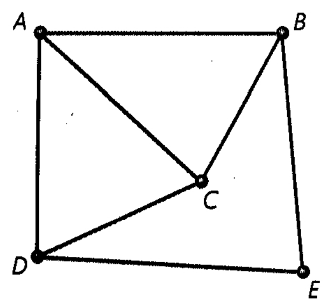

Figura 3.10: G_{10}

O João quer ganhar tempo e pretende passar pelos postos de venda uma única vez, mas tem que partir e chegar no mesmo ponto - o Armazém A .

Neste exercício os alunos devem concluir que o grafo tem pelo menos um ciclo Hamiltoniano, por exemplo, C: A, B, D, C, A.

1.1) Será que o consegue fazer?

1.2) Entretanto, houve uma ruptura de uma cano na rua que liga o Armazém a C. Sendo assim, será que consegue fazer o percurso nas mesmas condições?

Considerando o ciclo anterior não é possível fazer o percurso nas mesmas condições.

2. O mapa que se segue mostra-nos a rede do Metropolitano de Lisboa.

Tendo em conta que as linhas têm dois sentidos, consegue fazer um ciclo Hamiltoniano que comece e termine na Gare do Oriente, sem passar duas vezes por uma mesma estação e visitando Alvalade, Campo Grande e Marquês de Pombal?

Não é possível fazer um ciclo nessas condições pois Alameda representa uma ponte entre a Gare do Oriente e todas as outras.

E se começar e acabar na Alameda? [5]

Se começar na Alameda já é possível fazer esse ciclo Hamiltoniano.

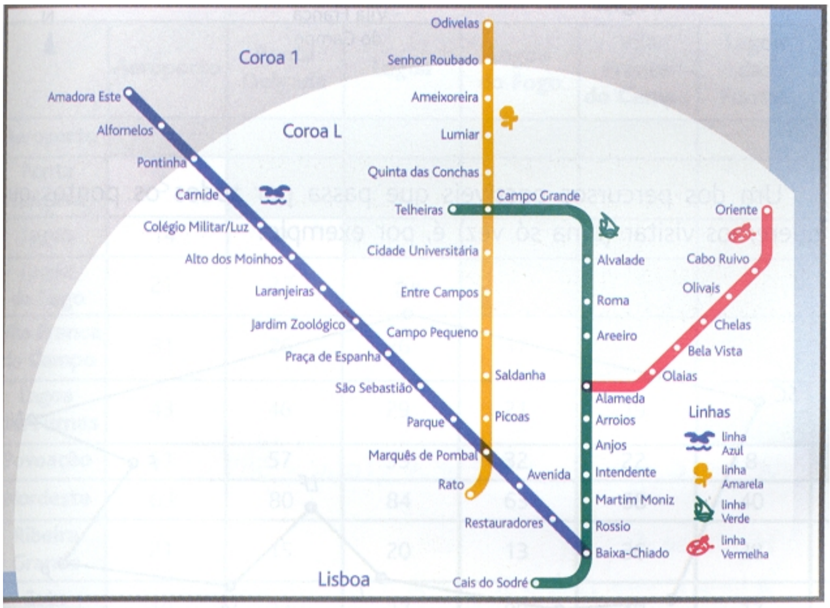

Figura 3.11: G_{11}

Avaliação:

O professor avalia a postura, o comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

Materiais:

Giz branco; apagador; quadro; manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da ASA e da Areal Editores.

3.3.2 Plano de aula nº 2

Sumário

Correcção do trabalho de casa.
Grafos Hamiltonianos e grafos bipartidos.
Grafos Hamiltonianos e grafos completos.
Algoritmo da Força - Bruta.

Tópico:

Comentários

Unidade: Modelos de Grafos.

- Grafos Hamiltonianos e grafos bipartidos.
- Grafos Hamiltonianos e grafos completos.
- Algoritmo da Força - Bruta.

Objectivos:

- Identificar em que casos os grafos bipartidos completos têm ciclos e caminhos Hamiltonianos.
- Definir grafo ponderado.
- Identificar o melhor ciclo Hamiltoniano num dado grafo tendo em atenção os pesos atribuídos às arestas.
- Aplicar o algoritmo da Força - Bruta para encontrar o melhor ciclo Hamiltoniano (tendo em conta a minimização de custos).
- Determinar o número de ciclos Hamiltonianos em grafos completos.

Formato de ensino:

- Discussão e exploração no grupo turma.

Actividade motivacional:

1. O António que é delegado da Informação Médica, tem na sua agenda várias farmácias que deve visitar em diferentes cidades.

Para escolher o melhor percurso, em termos de distância (em km), decidiu fazer um esquema.

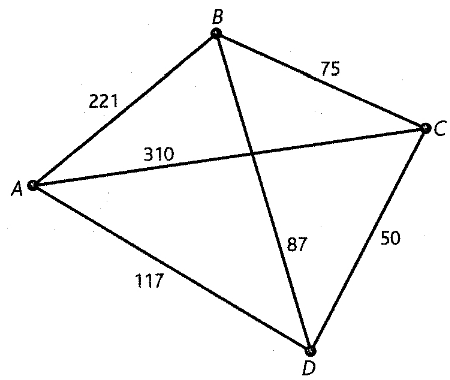

Figura 3.12: G_{12}

Supondo que sai da cidade A, qual é o percurso mais curto que lhe permite visitar todas as cidades e regressar a A? [5]

Exploração:

- Corrige-se o trabalho de casa.
- Introduz-se, desenhando um grafo bipartido no quadro, os ciclos Hamiltonianos em grafos bipartidos, começando por alertar os alunos que o grafo se denomina por grafo bipartido, dando-se de seguida a definição:

  Definição:

  Um grafo $G = (V, A)$ diz-se bipartido quando o conjunto dos seus vértices V puder ser dividido em dois subconjuntos V_1 e V_2 tais que qualquer aresta do grafo une um vértice de V_1 a um vértice de V_2. Um tal grafo bipartido é usualmente representado por $G = (V_1, V_2, A)$.

  No caso em que cada vértice de V_1 é adjacente a todos os vértices de V_2 o grafo G é chamado de grafo bipartido completo, sendo $| V_1 |= m$ e $| V_2 |= n$, então um grafo completo representa-se por $K_{m,n}$.

- Questiona-se os alunos se, no caso de $m = n = 3$, o grafo possui ciclos Hamiltonianos.

  Pretende-se que os alunos concluam que o grafo possui ciclos Hamiltonianos e consequentemente caminhos Hamiltonianos.

- Pergunta-se aos alunos se, por exemplo, no caso de $m = 4$ e $n = 3$, o grafo possui ciclos e caminhos Hamiltonianos.

  Os alunos devem concluir que o grafo possui caminhos Hamiltonianos mas não possui ciclos Hamiltonianos.

- Questiona-se, se no caso de $m = 4$ e $n = 2$, o grafo possui ciclos e caminhos Hamiltonianos.

  Neste caso devem concluir que o grafo não possui nem ciclos nem caminhos Hamiltonianos.

- Conclui-se que:

  - Se $m = n$, então o grafo possui ciclos Hamiltonianos.

  Explica-se que embora aqui se conclua através de exemplos, na generalidade este resultado verifica-se pode ser demonstrado.

- Se $\mid m-n \mid = 1$, então o grafo possui caminhos e não possui ciclos Hamiltonianos.

- Se $\mid m-n \mid > 1$, então o grafo não possui caminhos nem ciclos Hamiltonianos.

- Começa-se a explorar a actividade motivacional alertando os alunos que os valores atribuídos a cada uma das arestas, que neste caso representam as distâncias entre cada duas localidades, chamam-se "pesos".

O professor deve referir que este problema é um exemplo do conhecido Problema do Caixeiro-viajante (PCV) e dar uma noção geral deste tipo de problema.

Definição:

Peso é um número que se atribui a cada uma das arestas de um grafo. Pode representar distâncias, custos, tempo, etc. A um grafo com pesos atribuídos chama-se grafo ponderado.

- Alerta-se os alunos para o facto deste tipo de problema consistir em encontrar um ciclo Hamiltoniano com início em A (neste caso) e com o menor peso possível, considerando em seguida todos os ciclos Hamiltonianos com início em A e os respectivos pesos.

Reforça-se a ideia de que se está na presença de um grafo completo e que estes grafos têm sempre ciclos Hamiltonianos.

<u>Hipótese 1</u>:

$$A \xrightarrow[221]{} B \xrightarrow[75]{} C \xrightarrow[50]{} D \xrightarrow[117]{} A \; (total = 463Km)$$

O professor deve alertar que a razão pela qual se obteve percursos iguais dois a dois é porque o percurso é o mesmo, mas em sentido contrário.

<u>Hipótese 2</u>:

$$A \xrightarrow[221]{} B \xrightarrow[87]{} D \xrightarrow[50]{} C \xrightarrow[310]{} A \; (total = 668Km)$$

<u>Hipótese 3</u>:

$$A \xrightarrow[310]{} C \xrightarrow[75]{} B \xrightarrow[87]{} D \xrightarrow[117]{} A \; (total = 589Km)$$

O percurso mais curto é de 463 km.

<u>Hipótese 4</u>:

$$A \xrightarrow[310]{} C \xrightarrow[50]{} D \xrightarrow[87]{} B \xrightarrow[221]{} A \; (total = 668Km)$$

Refere-se que caso se comece noutro vértice encontra-se exactamente os mesmos ciclos. Em termos de minimização do comprimento total do ciclo não é relevante o local onde se começa, mas sim a ordem das cidades a visitar.

<u>Hipótese 5</u>:

$$A \xrightarrow[117]{} D \xrightarrow[87]{} B \xrightarrow[75]{} C \xrightarrow[310]{} A \; (total = 589Km)$$

<u>Hipótese 6</u>:

$$A \xrightarrow[117]{} D \xrightarrow[50]{} C \xrightarrow[75]{} B \xrightarrow[221]{} A \; (total = 463Km)$$

- Refere-se que o procedimento usado pode ser representado por um algoritmo que é denominado por "Algoritmo da Força-Bruta".

Algoritmo da Força - Bruta:

Os alunos deverão fazer o registo deste algoritmo no caderno.

1. Gerar todos os ciclos Hamiltonianos possíveis (a partir de um determinado vértice).
2. Adicionar os pesos das arestas utilizadas em cada um dos ciclos.
3. Escolher o ciclo para o qual a soma dos pesos das arestas percorridas é mínimo.

- Explora-se, conjuntamente com os alunos, o número de ciclos Hamiltonianos num grafo completo, através da resolução do exercício anterior, começando por identificar o número de ciclos Hamiltonianos num grafo completo de quatro vértices-K_4, concluindo que se tem três ciclos Hamiltonianos distintos.

- Refere-se que é possível determinar o número de ciclos Hamiltonianos num grafo completo com n vértices - K_n. Para tal começa-se por escolher um vértice (vértice inicial) e a partir daí existem $n-1$ hipóteses para o segundo vértice, $n-2$ hipóteses para o terceiro vértice e assim sucessivamente, até se ter apenas um vértice para escolher.

  De forma, que no final tem-se:

  $(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times 2\times 1$

  possibilidades. Este produto pode ser representado por $(n-1)!$

O professor deve dizer que o ponto de exclamação à frente de um número lê-se factorial e é uma notação abreviada do produto de todos os números naturais desde um até esse número.

- Alerta-se para o facto de que embora existam $(n-1)!$ formas diferentes de escolher os n vértices de modo a formarmos um ciclo Hamiltoniano, apenas metade correspondem a ciclos diferentes, donde se tem que, num grafo completo K_n existem $\frac{(n-1)!}{2}$ ciclos Hamiltonianos.

- Apresenta-se a seguinte tabela:

Nº de vértices	Nº de ciclos Hamiltonianos
3	$\frac{(3-1)!}{2}=\frac{2}{2}=1$
4	$\frac{(4-1)!}{2}=3$
7	$\frac{(7-1)!}{2}=360$
9	$\frac{(9-1)!}{2}=20160$
10	$\frac{(10-1)!}{2}=181440$

Pretende-se, através da apresentação desta tabela, mostrar como é que o número de ciclos Hamiltonianos aumenta à medida que o número de vértices de um grafo aumenta.

- Questiona-se os alunos se o método usado no exercício será um bom método.

Pretende-se que os alunos reparem que este processo é muito trabalhoso uma vez que é necessário considerar todos os ciclos Hamiltonianos que existem num grafo.
Permite encontrar a solução óptima

- Alerta-se os alunos que no exercício viu-se um grafo completo com 4 vértices, que tem 3 ciclos Hamiltonianos diferentes, mas que se, por exemplo,considerar-se um grafo completo com 6 vértices o número de ciclos Hamiltonianos diferentes aumenta para 60.

Trabalho de casa:

1. Na figura 3.13 estão representadas ligações aéreas, asseguradas por uma companhia de aviação sediada em Braga. [9]

Figura 3.13: Mapa representativo de ligações de uma empresa aérea.

1.1) Sabendo que a escala do mapa é de $1cm$ para $50Km$, utiliza uma régua graduada para determinar, com aproximação à dezena de quilómetros, as distâncias correspondentes a todas as ligações consideradas.

Permite que os alunos recordem o conceito de escala.

1.2) Na inauguração oficial das ligações aéreas, o presidente da companhia partiu de Braga, fez escalas em todos os destinos e regressou a Braga. Sabendo que utilizou um dos itenerários mais curto, identifica-o, e calcula a sua extensão em quilómetros.

Os alunos devem identificar o itenerário pedido através do algoritmo da força - bruta.

Avaliação:

O professor avalia a postura, o comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

Materiais:

Giz branco; apagador; quadro; manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da ASA e da Areal Editores.

3.3.3 Plano de aula nº 3

Sumário

Correcção do trabalho de casa.
Algoritmo do vizinho mais próximo.
Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas.
Resolução de exercícios.

Tópico:

Comentários

Unidade: Modelos de Grafos.

- Algoritmo do vizinho mais próximo.
- Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas.

Objectivos:

- Definir o algoritmo do vizinho mais próximo.
- Aplicar o algoritmo do vizinho mais próximo a problemas do tipo PCV.
- Definir o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas.
- Aplicar o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas a problemas do tipo PCV.
- Encontrar uma solução próxima da solução óptima (ou a óptima) na resolução de problemas.

Formato de ensino:

- Discussão e exploração no grupo turma.

Actividade motivacional:

1. Um vendedor de material informático tem de visitar empresas em diversos locais do País.

No grafo seguinte estão indicadas as cidades a visitar, bem como as distâncias entre elas (em km): [5]

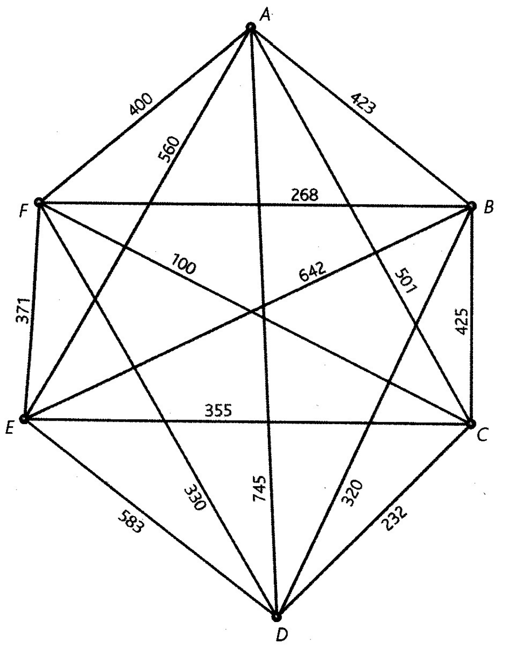

Figura 3.14: G_{13}

Exploração:

- Corrige-se o trabalho de casa.

A correcção do trabalho de casa será feita oralmente para não se dispor de muito tempo da aula.

- Inicia-se a resolução da actividade motivacional, referindo-se que tal como viram na aula anterior, não é recomendável procurar uma solução óptima pelo processo descrito (algoritmo da Força-Bruta) para problemas que envolvam grafos de dimensão superior a 5 (em termos de tempo e de custos).

  Por isso, foram criados algoritmos que permitem resolver o problema rapidamente, sem recurso a computadores e cujo resultado sem garantia de ser a solução óptima ou o caminho mais curto (no caso de distâncias), será uma solução próxima da solução óptima.

- Dá-se o primeiro algoritmo a usar.

  Algoritmo do vizinho mais próximo:

  Este algoritmo será colocado no quadro para os alunos passarem para os respectivos cadernos.

  1. Escolher um vértice para ponto de partida.
  2. A partir deste vértice escolher uma aresta com o menor peso possível que esteja ligada a um dos vértices adjacentes ainda não visitados (se houver mais do que uma hipótese escolher aleatoriamente).

3. Continuar a construir o ciclo, partindo de cada vértice para um vértice não visitado segundo a aresta com menor peso.
4. Do último vértice não visitado, regressar ao ponto de partida.

- Começa-se a aplicar o algoritmo do vizinho mais próximo à actividade motivacional observando-se o seguinte percurso:

$$A \xrightarrow[400]{} F \xrightarrow[100]{} C \xrightarrow[232]{} D \xrightarrow[320]{} B \xrightarrow[642]{} E \xrightarrow[560]{} A \ (total = 2254Km)$$

- Aplica-se o algoritmo, começando o percurso em cada uma das outras cidades:

$$B \xrightarrow[268]{} F \xrightarrow[100]{} C \xrightarrow[232]{} D \xrightarrow[583]{} E \xrightarrow[560]{} A \xrightarrow[423]{} B \ (total = 2166Km)$$

$$C \xrightarrow[100]{} F \xrightarrow[268]{} B \xrightarrow[320]{} D \xrightarrow[583]{} E \xrightarrow[560]{} A \xrightarrow[501]{} C \ (total = 2332Km)$$

$$D \xrightarrow[232]{} C \xrightarrow[100]{} F \xrightarrow[268]{} B \xrightarrow[423]{} A \xrightarrow[560]{} E \xrightarrow[583]{} D \ (total = 2166Km)$$

$$E \xrightarrow[355]{} C \xrightarrow[100]{} F \xrightarrow[268]{} B \xrightarrow[320]{} D \xrightarrow[745]{} A \xrightarrow[560]{} E \ (total = 2348Km)$$

$$F \xrightarrow[100]{} C \xrightarrow[232]{} D \xrightarrow[320]{} B \xrightarrow[423]{} A \xrightarrow[560]{} E \xrightarrow[371]{} F \ (total = 2006Km)$$

- Conclui-se, conjuntamente com os alunos, que o melhor percurso é o que corresponde a $2006km$ e o grafo que representa esse percurso é o seguinte:

Alerta-se os alunos que apesar de se ter escolhido a melhor opção em cada etapa, não significa que esta seja a melhor opção para o problema.

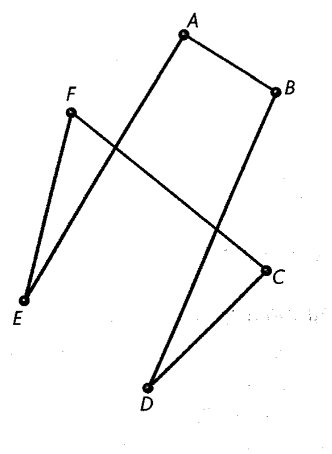

Figura 3.15: G_{14}

- Dá-se o segundo algoritmo a usar.

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:

1. Ordenam-se as arestas pelos seus pesos.
2. Escolhe-se sucessivamente a aresta a que corresponde o menor peso, tendo em conta as seguintes restrições:

a) não permitir que se formem ciclos que não incluam todos os vértices;

b) nunca se pode escolher três arestas que coincidam num mesmo vértice.

Explica-se as condições: No caso da 2.a) se fosse formado um ciclo antes de percorrer todos os vértices, seriam repetidos vértices. No caso da 2.b) se um circuito Hamiltoniano percorre todos os vértices de um grafo uma e uma só vez (excepto o primeiro que é também o último), então em cada vértice só podem concorrer duas e só duas arestas.

- Resolve-se a actividade motivacional aplicando o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas como a seguir se exemplifica:

Resolve-se o mesmo problema pelos dois algoritmos para se poder comparar os resultados obtidos.

Ordena-se as arestas do grafo por ordem crescente de distâncias entre os diferentes vértices.

$F \xrightarrow[100]{} C$; $C \xrightarrow[232]{} D$; $B \xrightarrow[268]{} F$; $B \xrightarrow[320]{} D$;

$D \xrightarrow[330]{} F$; $C \xrightarrow[355]{} E$; $E \xrightarrow[371]{} F$; $A \xrightarrow[400]{} F$;

$A \xrightarrow[423]{} B$; $B \xrightarrow[425]{} C$; $A \xrightarrow[501]{} C$; $A \xrightarrow[560]{} E$;

$D \xrightarrow[583]{} E$; $B \xrightarrow[642]{} E$; $A \xrightarrow[745]{} D$.

De seguida começa-se por escolher a aresta $F \xrightarrow[100]{} C$, pois é a que tem peso mais baixo e, em seguida, junta-se as arestas $C \xrightarrow[232]{} D$ e $B \xrightarrow[268]{} F$ por esta ordem. A aresta seguinte com menor peso é a $B \xrightarrow[320]{} D$ mas se for usada fecha-se o ciclo, o que não pode acontecer, pois ainda há vértices por visitar (ver Figura 3.16)

Alerta-se que a aplicação do algoritmo por ordenação dos pesos das arestas, pode acontecer que as arestas, à medida que vão sendo seleccionadas, não fiquem logo unidas entre si. No entanto, o grafo final terá sempre um ciclo Hamiltoniano.

Assim, elimina-se a aresta $B \xrightarrow[320]{} D$ e, pela mesma razão, também não se usa a aresta $D \xrightarrow[330]{} F$.

A aresta seguinte é a $C \xrightarrow[355]{} E$, mas se for usada tem-se três arestas a concorrer no vértice C, o que é incompatível com a existência de um ciclo Hamiltoniano (ver Figura 3.17).

Por esta razão elimina-se as arestas $E \xrightarrow[371]{} F$ e $A \xrightarrow[400]{} F$.

A aresta a seguir é a $A \xrightarrow[423]{} B$, que se pode usar, pois não cria ciclos nem é a terceira aresta a sair do mesmo vértice. Depois, elimina-se as arestas $B \xrightarrow[425]{} C$ (cria um ciclo) e $A \xrightarrow[501]{} C$ (ficam a coincidir três

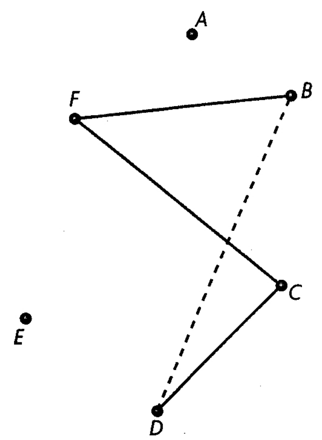

Figura 3.16: G_{15}

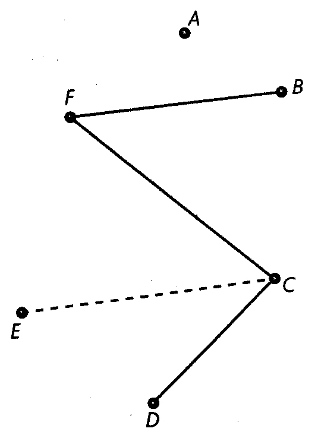

Figura 3.17: G_{16}

arestas em C, para além de criar um ciclo). De forma que nesta altura o grafo tem o seguinte aspecto: (ver Figura 3.18)

As arestas seguintes são $A \xrightarrow[560]{} E$ e $D \xrightarrow[583]{} E$, por esta ordem, as quais se pode usar, pois, apesar da aresta $D \xrightarrow[583]{} E$ fechar o ciclo, já não existem mais vértices para visitar. É também por isso que se elimina as duas últimas arestas $B \xrightarrow[642]{} E$ e $A \xrightarrow[745]{} D$.

Ordena-se as arestas do grafo por ordem crescente de distâncias entre os diferentes vértices.

Obtém-se o grafo final: (ver Figura 3.19)

E a seguinte distância total:

$100 + 232 + 268 + 423 + 560 + 583 = 2166km$

O professor deve referir que estes algoritmos são de rápida aplicação, embora nem sempre nos dêem a solução óptima. Para além disso, o algoritmo do vizinho mais próximo dá-nos uma solução melhor neste problema do que o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas, noutros casos ocorre o contrário. Isto significa que, à partida, não se pode concluir que um é melhor que o outro.

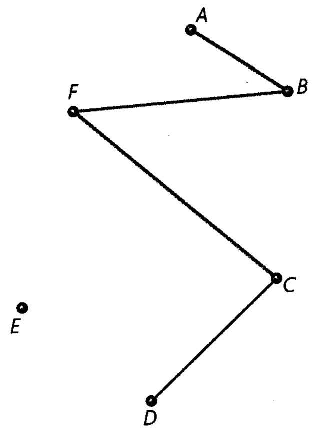

Figura 3.18: G_{17}

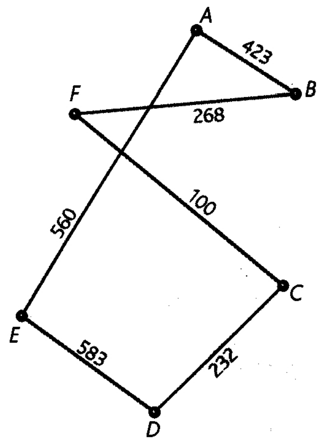

Figura 3.19: G_{18}

- Resolvem-se os exercícios das actividades práticas.

Actividades práticas:

1. A empresa Toldigest tem que montar reclames publicitários em cinco vilas do distrito de Braga: Vila Verde, Amares, Póvoa de Lanhoso, Prado e Apúlia. Os empregados da empresa que vão montar os reclames publicitários têm com objectivo passar por cada vila uma única vez, fazendo-o com vista a minimizar os gastos (menor distância percorrida = menor gasto). O quadro seguinte indica-nos as distâncias entre cada par destas vilas:

	Prado	V. Verde	Amares	P. Lanhoso	Apúlia
Prado		9	13	25	45
V. Verde	9		11	34	53
Amares	13	11		17	53
P. Lanhoso	25	34	17		54
Apúlia	45	53	53	54	

1.1) Determine um itinerário que obedeça às condições impostas, começando, por exemplo, em Prado.

Os alunos depois de escolher um itinerário que obedeça às questões impostas na questão 1.1, devem reparar que para garantir que o itinerário escolhido é o melhor teriam de determinar todos e entre estes escolher o menor.

1.2) O itinerário determinado na alínea anterior é o melhor?

1.3) Em que cidade(s) deve ficar o armazém de distribuição, de modo a que sejam minimizadas as distâncias a percorrer?

Aplicando os algoritmos aprendidos devem concluir que podem escolher Póvoa de Lanhoso, Prado ou Apúlia (embora sem garantia de realmente ser a melhor solução, sabem que é uma boa solução).

2. O desenho abaixo representa a planta do estaleiro de uma grande empresa onde estão assinalados os locais para instalar depósitos de combustível. Os depósitos deverão ser ligados uns aos outros em ciclo para a distribuição centralizada dos combustíveis. Sabe-se que cada quadrado da grelha tem 100 metros de lado e que as tubagens deverão ser colocadas verticalmente ou horizontalmente, conforme a grelha. [4]

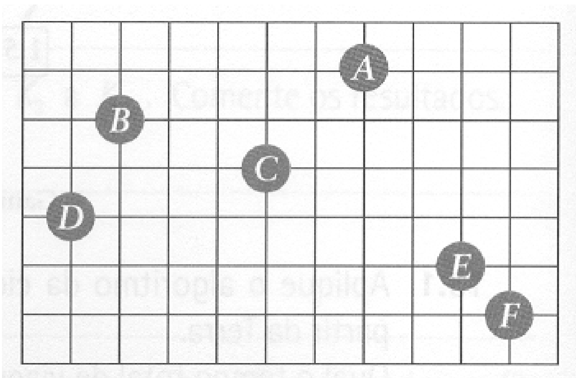

Figura 3.20: G_{19}

2.1) Completa a seguinte tabela das distâncias em metros entre cada depósito.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A					600	
B				300		
C		400			600	
D			500			
E						200
F	800					

2.2) Usando o algoritmo por ordenação dos pesos das arestas, determina a maneira mais económica de ligar todos os depósitos.

Através deste algoritmo, os alunos devem concluir que a maneira mais económica de ligar os depósitos é através do ciclo C:F, E, A, C, B, D, F.
O custo previsto nestas condições será de 15800 euros.

2.3) Depois de determinada a solução, calcula o custo sabendo que:
- um tubo de 100 metros custa 500 euros;
- um tubo de 200 metros custa 950 euros;
- um tubo de 500 metros custa 2300 euros;
- os tubos não podem ser cortados;
- cada curva e cada união para ligar os tubos custam 100 euros.

Trabalho de casa:

1. O David Mota, aluno da Universidade do Minho, vai correr numa maratona realisada pelas Universidades: do Minho, do Porto, de Guimarães, de Viana do Castelo, de Vila Real e de Aveiro. Desejoso de obter um bom resultado decidiu visitar todas as cidades para fazer o reconhecimento dos percursos. Considere a seguinte tabela representativa das distâncias (em Km) entre as várias cidades.

	Braga	**Porto**	**Guimarães**	**Viana**	**V. Real**	**Aveiro**
Braga		54	26	55	136	124
Porto	54		55	78	97	77
Guimarães	26	55		72	75	126
Viana	55	78	72		168	148
V. Real	136	97	75	168		167
Aveiro	124	77	77	126	167	

1.1) Sabendo que o David Mota parte de Braga, que para concluir a maratona tem que voltar à cidade de partida e que cada quilómetro lhe vai custar 20 cêntimos, quantos euros deverá gastar? Aplique o algoritmo do vizinho mais próximo.

Aplicando o algoritmo do vizinho mais próximo, os alunos devem concluir que o ciclo pretendido é: Braga, Guimarães, Porto, Aveiro, Viana, V. Real, Braga. A distância deste ciclo é $610km$, e o custo é 122 euros.

1.2) Suponha que os outros atletas em cada uma das outras cidades fez o mesmo. Qual(s) o(s) que vai gastar menos dinheiro?

Os alunos aplicando novamente o algoritmo do vizinho mais próximo, neste caso considerando as outras cidades como ponto de partida, devem concluir que os atletas que vão gastar menos dinheiro são os que partem de Guimarães, os de Viana e os de V. Real com um custo de 109,6 euros.

Avaliação:

O professor avalia a postura, o comportamento e a participação dos alunos na aula, através de observação directa.

Materiais:

Giz branco; apagador; quadro; manuais da Porto Editora, da Texto Editora, da Plátano, da ASA e da Areal Editores.

3.3.4 Ficha de Avaliação

ESCOLA

11º Ano MACS Data

Nome Nº Turma

Classificação Professora

Encarregado de Educação

Grupo I

1) A ordem de um grafo G com 15 arestas, 3 vértices de grau 4 e todos os outros com grau 3 é: [1]

(A) 7 **(B)** 5 **(C)** 9 **(D)** 10

2) Uma empresa vai abrir 8 novas sucursais em 8 cidades Portuguesas. Um empregado da empresa pretende visitá-las a todas numa única viagem e no menor número de quilómetros. Se este para encontrar tal percurso, decidir estudar todos os percursos, quantos percursos diferentes tem a empresa que considerar?

(A) 5040 **(B)** 2520 **(C)** 40320 **(D)** 20160

3) Relativamente ao seguinte grafo, pode afirmar-se que: [9]

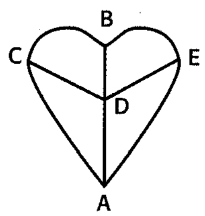

Figura 3.21: G_1

(A) existe um ciclo Hamiltoniano.
(B) existe um ciclo de Euler.
(C) todos os vértices têm igual valência.
(D) pode ser "eulerizado" através de uma aresta adicional.

4. Assinala a(s) opção(s) correcta(s).[9]

4.1) Um grafo simples admite mais do que uma aresta a ligar dois vértices.

4.2) O grau de um vértice num grafo simples é o número de arestas que nele terminam.

4.3) Num grafo conexo, há pelo menos um caminho que liga qualquer par de vértices.

4.4) Se um grafo admite um caminho de Euler, então admite também um ciclo de Euler.

4.5) Uma empresa, com um sector de distribuição de mercadorias deve investir os seus recursos para determinar os percursos mais curtos que satisfazem as suas necessidades, naquele âmbito, por ser garantida em tempo útil a determinação de soluções óptimas.

Grupo II

1. É possível que num grupo de 7 pessoas cada uma delas conheça exactamente 3 pessoas do grupo? [1]

2. Indica se os grafos das figuras 3.22 - 3.24 são Eulerianos ou Hamiltonianos. Justifica. [4]

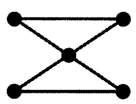

Figura 3.22: G_2

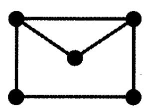

Figura 3.23: G_3

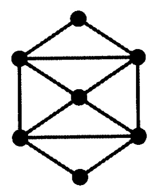

Figura 3.24: G_4

3. O grafo da figura esquematiza os custos estimados, numa unidade monetária, do transporte de combustíveis a partir de uma refinaria localizada em E. [9]

3.1) Admitindo a necessidade de considerar a existência de um passeio Hamiltoniano de custo mínimo, indica um dos vértices onde poderia estar a refinaria? Justifica.

3.2) Determina o grau de cada vértice do grafo.

3.3) Justifica o facto de este grafo admitir um passeio de Euler. Dá um exemplo concreto de tal passeio e estima o custo correspondente.

3.4) "Euleriza" o grafo, indicando que aresta(s) acrescentaste.

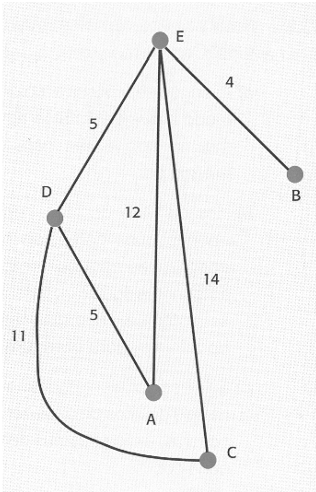

Figura 3.25: G_5

3.5) Considerando a minimização dos custos de transporte a partir da refinaria, diz, justificando, que arestas supririas.

4. O barão Florêncio deu nomes de flores às divisões da sua casa que está representada na figura 3.26. Ora, o barão Florêncio acabou de ser raptado e está a ser exigido um grande resgate. Suspeita-se que o raptor teve como cúmplice um dos seus três funcionários: o cozinheiro, o mordomo ou o jardineiro. [3]

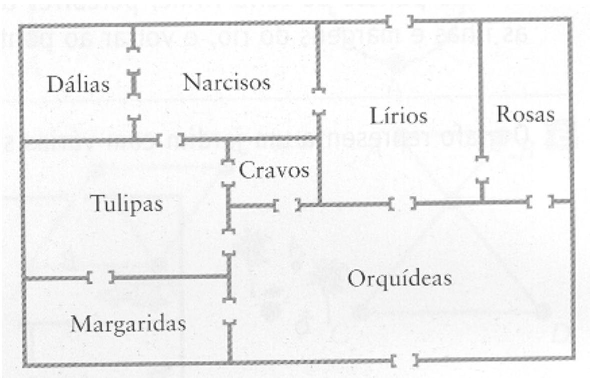

Figura 3.26: G_6

O detective Hércules foi chamado para resolver a questão e decidiu interrogar um a um os suspeitos sobre as suas movimentações nesse dia.

- Cada um deles afirmou não ter passado duas vezes na mesma porta durante todo o dia.

- O jardineiro afirmou ter entrado pela frente da casa (sala das Orquídeas), visitou todas as salas excepto a sala das Dálias e saiu pelas traseiras (sala dos Lírios) sem nada ter visto.
- O mordomo disse que estava na sala dos lírios, visitou todas as salas e terminou na sala das Orquídeas, sem nunca ter saído à rua, nem ter utilizado a porta da sala das tulipas para a sala dos Narcisos.
- O cozinheiro disse que entrou na sala pelas traseiras e à noite saiu pela frente. Durante o dia, afirmou ter estado em todas as salas, excepto nas salas dos Cravos e das Margaridas.

O detective Hércules desenhou grafos e concluiu imediatamente que um deles estava a mentir. Descreve o raciocínio utilizado pelo detective. Justifica convenientemente a resposta.

5. O eng. José Fernandes foi incumbido de representar a sua empresa na zona sul de Portugal. No grafo da Figura 3.27 estão representadas as distâncias entre as cidades capitais do distrito. [4]

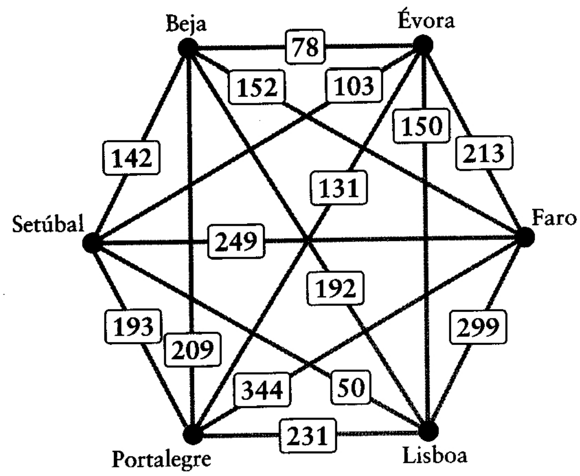

Figura 3.27: G_7

5.1) Sabendo que o eng. José Drumonde vai alugar um carro em Lisboa, onde terá de o devolver, e que esse carro consome seis litros de gasóleo aos $100Km$, e que um litro de gasóleo custa $0,80$ euros, determina qual o custo que ele prevê. Utiliza o algoritmo que achares mais apropriado.

5.2) O eng. José Fernandes costuma almoçar durante as viagens entre duas cidades, tendo já restaurantes conhecidos e habituais entre as mesmas. No grafo seguinte estão representados os custos em euros de cada uma dessas refeições. Pretendendo gastar o menos possível, irá o eng. José Drumonde manter o trajecto anterior? Justifica conveniente a resposta.

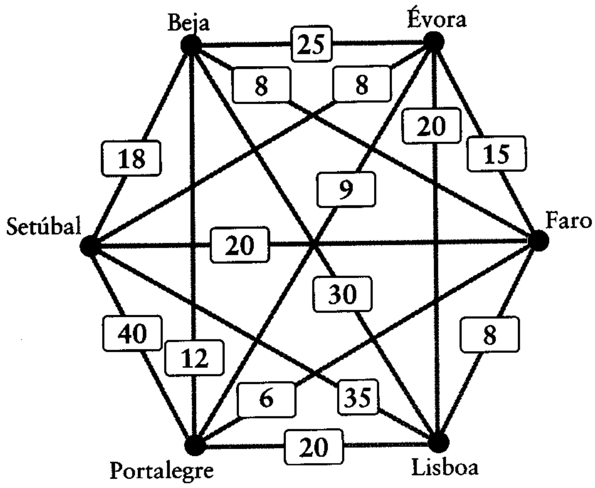

Figura 3.28: G_8

Capítulo 4

Reflexão

A disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais destina-se aos Cursos Geral de Ciências Sociais e Humanas e Tecnológico de Ordenamento do Território, tratando-se de uma disciplina bienal para o Curso Geral e trienal para o Curso Tecnológico.

Segundo o Ministério da Educação, "esta disciplina pretende desempenhar um papel incontornável para os estudantes dos cursos referidos, contribuindo para uma abordagem tão completa quanto possível de situações reais...". Para além disso, através desta disciplina pretende que os estudantes adquiram "experiências matemáticas significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras actividades" assim como contribuir para a Educação para a cidadania.

Daí que os temas escolhidos para esta disciplina, tenham sido seleccionados visando a Matemática do dia a dia, pretendendo-se que sejam abordados mais numa perspectiva de formação cultural do que de formação estritamente técnica. A este respeito o Ministério da Educação refere que "os temas propostos e as metodologias preconizadas pretendem responder ao facto de se dirigir a um sector de estudantes que não tem sido suficientemente conquistado para a Matemática."

A ordem em que os diferentes temas desta disciplina é leccionada, fica ao critério dos professores.

Um dos temas a ser abordado nesta disciplina é "Modelos de Grafos".

De facto, pelo que pude constatar, a abordagem feita pelos manuais ao tema sustenta-se sobretudo em problemas da vida real, o que realmente me parece contribuir para um maior interesse por parte dos alunos.

Este tema apenas é abordado nesta altura, pois até ao final do 3º ciclo estudam-se os conceitos base gerais sobre outros temas, como funções, geometria e probabilidades, que são necessários posteriormente no ensino Secundário em Agrupamentos como o Científico Natural.

De qualquer forma surge a questão, será que o tema Modelos de Grafos também não poderia ser dado no 3º ciclo?

Embora ache que o tema seja bastante interessante, parece-me que os alunos nessa fase ainda não se encontram a um nível cognitivo que lhes permita entender e sobretudo visualizar determinadas noções dadas em Teoria de Grafos.

Segundo Piaget, entre os 12 e os 16 anos, os adolescentes começam a desprender-se do real, sem precisar de se apoiar em factos, ou seja, podem pensar abstractamente e deduzir mentalmente sobre várias hipóteses que se colocam (encontram-se no Estádio de Desenvolvimento das Operações Formais).[24]

Assim, parece-me correcto que os Modelos de Grafos sejam abordados nesta altura pois todos os alunos já devem ser capazes de entender e encontrar soluções para os problemas dados neste tema.

Por outro lado, considerando a forma como este tema tem aplicabilidade na vida real, acho que devia ser abordado noutros Agrupamentos e não apenas no Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas e Tecnológico de Ordenamento do Território.

Devido ao facto de o tema "Modelos de Grafos" ser um tema de Matemática Discreta, os alunos não necessitam de bases matemáticas específicas. Necessitam sim de se habituar a usar uma linguagem própria de Teoria de Grafos.

Da mesma forma, este tema (ou desenvolvimento deste) não volta a ser abordado na disciplina, o que significa que não existem pontes entre os níveis de ensino.

Um aspecto, que no meu entender falha, é relativo aos objectivos específicos dados pelo Ministério da Educação sobre o tema. Este aspecto está patente na forma como os próprios manuais abordam o tema. Embora, em geral, os manuais usem a mesma sequência do tema, existem algumas discrepâncias na forma como os abordam. Note-se que, por exemplo, o manual da Porto Editora aborda muitos mais assuntos que os manuais das restantes editoras. [3] [5] [7] [10] [9]

Como os objectivos dados pelo Ministério da Educação, são muito gerais, o professor tem que subentender o que deverá ser dado ou não (o mesmo acontecendo com as editoras).Assim, ao planificar os meus planos de aulas, debati-me com este problema, optando por abarcar o máximo de assuntos presentes nos diferentes manuais, não deixando, de prescindir de alguns, como por exemplo, ciclos Hamiltonianos e grafos-grelha (apenas mencionado no manual da Porto Editora).

Neste aspecto, o que o Ministério da Educação refere é que "... afigura-se obrigatória uma abordagem dos ciclos Hamiltonianos..." não especificando em concreto em que tipo de grafos pretende que esta abordagem seja feita e argumenta também que "tem-se consciência de que a implementação deste programa só poderá ser feita gradualmente, devendo os professores esforçar-se por cumprir mais cabalmente os objectivos propostos de ano para ano".

Bibliografia

[1] Sequeira, M., "Apontamentos das aulas de Tópicos de Matemática Discreta", Universidade do Minho, 2002.

[2] Smith, Paula, "Apontamentos das aulas de Tópicos de Matemática Discreta", Doutora Paula Smith, 2003.

[3] Neves, M., Azevedo & Faria, "Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11º ou 12º", Porto Editora, 2005.

[4] Neves, M., Azevedo & Faria, "Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11º ou 12º - Caderno de Actividades", Porto Editora, 2005.

[5] Temporão, Cardadeiro & Peles, "Matemática Aplicada às Ciências Sociais", Plátano Editora, 2005.

[6] Temporão, Cardadeiro & Peles, "Livro de exercícios de Matemática Aplicada às Ciências Sociais", Plátano Editora, 2005.

[7] Longo & Branco, "Matemática Aplicada às Ciências Sociais", Texto Editores, 2005.

[8] Longo & Branco, "Caderno de exercícios de Matemática Aplicada às Ciências Sociais“, Texto Editores, 2005.

[9] Maciel, "Matemática Aplicada às Ciências Sociais“, Edições ASA, 2005.

[10] Cruchinho & Simões, "Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11º/12º Ano“, Areal Editores, 2005.

[11] Clark & Holton, "A first look at Graph Teory“, World Scientific,1991.

[12] Balakrishnan & Ranganathan,"A TextbooK of Graph Teory“, Springer,1991.

[13] Chartrand, "Introductory Graph Theory“, Inc. New York,1977.

[14] Chartrand & Oellermann,"Applied and Algorithmic Graph Theory“, McGraw-Hill Internacional Editions,1993.

[15] Berge,“Graphs“, North-Holland,1991.

[16] Euler, L.,“Solutio problematis ad geometrian situs pertinentis“, Commentarii academicae scientarum Petropolitanae,1736.

[17] Monteiro, Manuela e Santos, Milice Ribeiro. “Psicologia“. Porto Editora, 1999.

[18] Silva, Martins & Loura, “Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais“.

[19] http://www.emis.de/classics/Hamilton.
Wilkins,“Sir William Rowan Hamilton (1805-1865): Mathematical Papers“,2000.

[20] http://www.math.uminho.pt/ pedro/Aulas0506/Discreta/grafos/index.html.
Patrício,“Breve Introdução à Teoria de Grafos“,2006.

[21] www.mat.ua.pt/dcardoso/TextosApoio/TGA.pdf.
Cardoso,“Teoria dos Grafos e Aplicações“, 2004/2005.

[22] http://www.prof2000.pt/users/adam/grafos/dois13.htm.
Martins,“Iniciação à teoria de grafos“.

[23] http://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm.
Dalgety,“The Icosian Game“.

[24] http://pente.ufrgs.br/ marcia/piaget.htm.
Nitzke, Campos & Lima,“Piaget“.

[25] www.dimap.ufrm br/ dario/arquivos/Cap1_Grafos-20012.doc.
Aloise & Cruz,“Teoria dos Grafos e Aplicações“,2001.

[26] www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/Recursos_na_internet.htm-30k-.
Simões,“Introdução“, 1998/1999.

[27] http://www.geometry.net/detail/scientists/konig_denes_page_no_5.html.