Capítulo 6

Transformações lineares

6.1 Definição e exemplos

Definição 6.1.1. *Sejam V, W espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma* transformação linear *ou aplicação linear de V em W é uma função $T : V \to W$ que satisfaz, para $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}$,*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$;
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Para $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definidas por

$$F(x, y) = (x - y, 2x + y, 0, y)$$

e

$$G(x, y) = (x^2 + y^2, 1, |x|, y),$$

tem-se que F é linear enquanto G não o é. De facto, para $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos $F(u_1 + u_2) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2, 0, y_1 + y_2) = (x_1 - y_1, 2x_1 + y_1, 0, y_1) + (x_2 - y_2, 2x_2 + y_2, 0, y_2) = F(u_1) + F(u_2)$, e $F(\alpha u_1) = F(\alpha x_1, \alpha y_1) = (\alpha x_1 - \alpha y_1, 2\alpha x_1 + \alpha y_1, 0, \alpha y_1) = \alpha(x_1 - y_1, 2x_1 + y_1, 0, y_1) = \alpha F(u_1)$, enquanto que $G(-(1, 1)) = G(-1, -1) = ((-1)^2 + (-1)^2, 1, |-1|, -1) = (2, 1, 1, -1) \neq -(2, 1, 1, 1) = -G(1, 1)$

Apresentamos alguns exemplos clássicos de transformações lineares:

1. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por $T_A(x) = Ax$. A aplicação T_A é uma transformação linear. Ou seja, dada uma matriz, existe uma transformação linear associada a ela. No entanto, formalmente são entidades distintas. Mais adiante, iremos ver que qualquer transformação linear está associada a uma matriz.

2. Seja $V = C^\infty(\mathbb{R})$ o espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ constituído pelas funções reais de variável real infinitamente (continuamente) diferenciáveis sobre $\mathbb{R}$. Seja $D : V \to V$ definida por $D(f) = f'$. Então, usando noções elementares de análise, é uma transformação linear.

3. A aplicação $F : \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}_{n-1}[x]$ definida por $F(p) = p'$, onde $p \in \mathbb{K}_n[x]$ e p' denota a derivada de p em ordem a x, é uma transformação linear.

4. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $F : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ definida por $F(X) = XA$. Usando as propriedades do produto matricial, F é uma transformação linear.

5. A aplicação $Trans : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ definida por $Trans(A) = A^T$ é uma transformação linear.

6. Seja V um espaço vectorial arbitrário sobre $\mathbb{K}$. As aplicações $I, O : V \to V$ definidas por $I(v) = v$ e $O(v) = 0$ são transformações lineares. Denominam-se, respectivamente, por transformação identidade e transformação nula.

Definição 6.1.2. *Seja T uma transformação linear do espaço vectorial V para o espaço vectorial W.*

1. *Se $V = W$, diz-se que T é um* endomorfismo *de V.*

2. *A um homomorfismo injectivo de V sobre W chama-se* monomorfismo *de V sobre W; a um homomorfismo sobrejectivo de V sobre W chama-se* epimorfismo *de V sobre W; a um homomorfismo bijectivo de V sobre W chama-se* isomorfismo *de V sobre W; a um endomorfismo bijectivo de V chama-se* automorfismo *de V.*

3. *V e W são ditos* isomorfos*, e representa-se por $V \cong W$, se existir uma transformação linear de V em W que seja um isomorfismo.*

6.2 Propriedades das transformações lineares

Proposição 6.2.1. *Sejam V, W espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Então*

1. *$T(0_v) = 0_w$ para $0_v \in V,\ 0_w \in W$;*

2. *$T(-v) = -T(v), \forall v \in V$;*

3. *$T(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i),\ v_i \in V,\ \alpha_i \in \mathbb{K}$;*

4. *Se $v_1, v_2, ..., v_n$ são vectores de V linearmente dependentes, então $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ são vectores de W linearmente dependentes.*

Demonstração. As afirmações 1–3 seguem da definição de transformação linear. Mostremos (4).

Se $v_1, v_2, ..., v_n$ são vectores de V linearmente dependentes então um deles, digamos v_k, escreve-se como combinação linear dos restantes:

$$v_k = \sum_{i=0, i\neq k}^{n} \alpha_i v_i.$$

Aplicando T a ambos os membros da equação,

$$T(v_k) = T\left(\sum_{i=0, i\neq k}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \alpha_i T(v_i),$$

e portanto $T(v_k)$ escreve-se como combinação linear de $T(v_1), T(v_2), T(v_{k-1}), \ldots, T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)$. Segue que $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ são vectores de W linearmente dependentes. □

Em geral, uma transformação **não** preserva a independência linear. Por exemplo, a transformação linear

$$\begin{array}{rccc} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ T: & (x, y) & \longrightarrow & (0, y). \end{array}$$

As imagens da base canónica de $\mathbb{R}^2$ não são linearmente independentes.

Recordamos que, apesar de indicarmos uma base como um conjunto de vectores, é importante a ordem pela qual estes são apresentados. Ou seja, uma base é um n-uplo de vectores. Por forma a não ser confundida por um n-uplo com entradas reais, optámos por indicar uma base como um conjunto. É preciso enfatizar esta incorrecção (propositadamente) cometida.

Teorema 6.2.2. *Sejam V, W espaços vectoriais, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $w_1, \ldots, w_n \in W$ não necessariamente distintos. Então existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que*

$$T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, \ldots, T(v_n) = w_n.$$

Demonstração. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então todo o elemento de v escreve-se de forma única como combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$. Isto é, para qualquer $v \in V$, existem $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Seja $T : V \to W$ definida por

$$T\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i w_i.$$

Obviamente, $T(v_i) = w_i$. Observe-se que T é de facto uma aplicação pela unicidade dos coeficientes da combinação linear relativamente à base. Mostre-se que T assim definida é linear. Para $\alpha \in \mathbb{K}$, $u = \sum_i \beta_i v_i$ e $w = \sum_i \gamma_i v_i$,

$$\begin{aligned}
T(u+w) &= T\left(\sum_i \beta_i v_i + \sum_i \gamma_i v_i\right) \\
&= T\left(\sum_i (\beta_i + \gamma_i) v_i\right) \\
&= \sum_i (\beta_i + \gamma_i) w_i \\
&= \sum_i \beta_i w_i + \sum_i \gamma_i w_i \\
&= T(u) + T(w)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T(\alpha u) &= T(\alpha \sum_i \beta_i v_i) \\
&= T(\sum_i \alpha \beta_i v_i) \\
&= \sum_i \alpha \beta_i w_i \\
&= \alpha \sum_i \beta_i w_i = \alpha T(u).
\end{aligned}$$

Portanto, T assim definida é linear.

Mostre-se, agora, a unicidade. Suponhamos que T' é uma aplicação linear que satisfaz $T'(v_i) = w_i$, para todo o i no conjunto dos índices. Seja $v \in V$, com $v = \sum_i \alpha_i v_i$. Então

$$\begin{aligned}
T'(v) &= T\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) \\
&= \sum_i T'(v_i) \\
&= \sum_i \alpha_i w_i \\
&= \sum_i \alpha_i T(v_i) \\
&= T\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = T(v).
\end{aligned}$$

Portanto, $T = T'$. □

Teorema 6.2.3. *Todo o espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Demonstração. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V e v um vector qualquer de V. Então $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{K}$. Vamos definir uma transformação T,

$$T: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ v & \longrightarrow & (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \end{array}.$$

Pretendemos mostrar que esta aplicação é um isomorfismo de espaços vectoriais.

(a) A aplicação T é bijectiva.

Primeiro, verificamos que T é injectiva, i.e., que

$$T(u) = T(v) \Longrightarrow u = v, \ \forall \ u, v \in V.$$

Ora,

$$\begin{aligned} T(u) = T(v) &\iff T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = T(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i) \\ &\iff (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \\ &\iff \alpha_i = \beta_i \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \\ &\iff u = v. \end{aligned}$$

Mostramos, agora, que T é sobrejectiva, i.e., que

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \exists w \in V : f(w) = x.$$

Temos sucessivamente,

f é sobrejectiva $\iff \forall x \in \mathbb{K}^n, \exists w \in V : f(w) = x \iff \forall (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \in \mathbb{K}^n, \exists w = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + ... + \delta_n v_n \in V : T(\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + ... + \delta_n v_n) = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$.

(b) A aplicação T é linear.

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n) \\ &= T[(\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)v_n] \\ &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) + T(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(\alpha u) &= T\left(\alpha(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n)\right) \\ &= T\left((\alpha\alpha_1)v_1 + (\alpha\alpha_2)v_2 + ... + (\alpha\alpha_n)v_n\right) \\ &= (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, ..., \alpha\alpha_n) \\ &= \alpha(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \\ &= \alpha T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha T(u) \end{aligned}$$

□

Corolário 6.2.4. *Sejam U e V dois espaços vectoriais sobre mesmo corpo $\mathbb{K}$. Se U e V têm a mesma dimensão, então U e V são isomorfos.*

Por exemplo, o espaço vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ é isomorfo a $\mathbb{R}^6$. De facto, considerando a base de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

as coordenadas de $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ é o vector (a,b,c,d,e,f). Definindo a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^6$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = (a,b,c,d,e,f)$, é linear e é bijectiva. Logo, $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^6$.

Da mesma forma, o espaço vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ dos polinómios de grau não superior a 2, juntamente com o polinómio nulo, é isomorfo a $\mathbb{R}^3$. Fixando a base de $\mathbb{R}_2[x]$ constituída pelos polinómios p, q, r definidos por $p(x) = 1, q(x) = x, r(x) = x^2$ e a base canónica de $\mathbb{R}^3$ a transformação linear que aplica p em $(1,0,0)$, q em $(0,1,0)$ e r em $(0,0,1)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}_2[x]$ em $\mathbb{R}^3$.

Pelo exposto acima, é fácil agora aceitar que $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$ ou que $\mathbb{R}_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$.

Para finalizar esta secção, note que $\mathbb{C}$, enquanto espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, é isomorfo a $\mathbb{R}^2$. De facto, 1 e i formam uma base de $\mathbb{C}$, enquanto espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. São linearmente independentes ($a + bi = 0$ força $a = b = 0$) e todo o complexo z escreve-se como $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O isomorfismo pode ser dado pela transformação linear que aplica 1 em $(1,0)$ e i em $(0,1)$.

6.3 Matriz associada a uma transformação linear

Iremos concluir que todas as transformações lineares de $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ podem ser representadas por matrizes do tipo $m \times n$. Como motivação, consideramos alguns exemplos.

Sejam e_1, e_2, e_3 elementos da base canónica B_1 de $\mathbb{R}^3$ e e_1^*, e_2^* os elementos da base canónica B_1^* de $\mathbb{R}^2$. Seja ainda $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} T(e_1) &= a_{11}e_1^* + a_{21}e_2^* \\ T(e_2) &= a_{12}e_1^* + a_{22}e_2^* \\ T(e_3) &= a_{13}e_1^* + a_{23}e_2^*. \end{aligned}$$

Recorde que a transformação linear está bem definida à custa das imagens dos vectores de uma base.

Se $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + x_3T(e_3) \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Ax \end{aligned}$$

Por outras palavras, a transformação linear definida atrás pode ser representado à custa de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, que tem como colunas as coordenadas em relação a B_1^* das imagens dos vectores $e_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3$ por T. Desta forma, dizemos que nas condições do exemplo anterior, a matriz A é a representação matricial de T relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Por exemplo, considere a aplicação linear T definida por

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (4,-1) = 4(1,0) - 1(0,1) \\ T(0,1,0) &= (-2,5) = -2(1,0) + 5(0,1) \\ T(0,0,1) &= (3,-2) = 3(1,0) - 2(0,1) \end{aligned}$$

A matriz que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ é $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$. Para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $T(v) = Av$.

Repare que os cálculos envolvidos foram simples de efectuar já que usámos as bases canónicas dos espaços vectoriais. Tal não será, certamente, o caso se usarmos outras bases que não as canónicas. Neste caso, teremos que encontrar as coordenadas das imagens dos elementos da base do primeiro espaço vectorial em relação à base fixada previamente do segundo espaço vectorial. Vejamos o exemplo seguinte:

Sejam $\{u_1, u_2, u_3\}$ base B_2 de $\mathbb{R}^3$ e $\{v_1, v_2\}$ base B_2^* de $\mathbb{R}^2$. Se $x \in \mathbb{R}^3$, então $x = \xi_1u_1 + \xi_2u_2 + \xi_3u_3$, e consequentemente

$$T(x) = \xi_1T(u_1) + \xi_2T(u_2) + \xi_3T(u_3).$$

Por outro lado, $T(u_i) \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3$, logo, podemos escrever estes vectores como combinação linear de v_1 e v_2. Assim,

$$\begin{aligned} T(u_1) &= b_{11}v_1 + b_{21}v_2 \\ T(u_2) &= b_{12}v_1 + b_{22}v_2 \\ T(u_3) &= b_{13}v_1 + b_{23}v_2. \end{aligned}$$

Verificamos, então, que,

$$\begin{aligned} T(x) &= \xi_1(b_{11}v_1 + b_{21}v_2) + \xi_2(b_{12}v_1 + b_{22}v_2) + \xi_3(b_{13}v_1 + b_{23}v_2) \\ &= (\xi_1b_{11} + \xi_2b_{12} + \xi_3b_{13}v_1) + (\xi_1b_{21} + \xi_2b_{22} + \xi_3b_{23}v_2) \\ &= \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Dizemos, agora, que $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ é a matriz de T relativamente às bases B_2 e B_2^* de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Passamos de seguida a expôr o caso geral.

Sejam $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base de U, $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V, e

$$T \quad : \quad U \to V$$

$$x \to T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_j T(u_i).$$

O vector $T(u_j)$ pode ser escrito – de modo único – como combinação linear dos vectores $v_1, v_2, ..., v_m$. Assim

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v_i, \quad j = 1, ..., n.$$

Logo

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(u_j) = \sum_{j=1}^{n} [\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i] = \sum_{j=1}^{n} [a_{1j} x_j] v_1 + \sum_{j=1}^{n} [a_{2j} x_j] v_2 + ... + \sum_{j=1}^{n} [a_{mj} x_j] v_m = \sum_{j=1}^{n} \varphi v_i.$$

Verificamos, assim, que existe entre as coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de x (relativa à base B_1), em U, e as coordenadas $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ de $T(x)$ (relativa à base B_2) em V. Tal ligação exprime-se pelas seguintes equações

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

O que se pode ser escrito como a equação matricial seguinte:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix}$$

Assim, concluímos:

Teorema 6.3.1. *Se fixamos uma base de U e uma base de V, a aplicação linear $T : U \longrightarrow V$ fica perfeitamente definida por $m \times n$ escalares. Ou seja, a aplicação linear $T : U \longrightarrow V$ fica perfeitamente definida por uma matriz do tipo $m \times n$*

$$M_{B_1, B_2}(T)$$

cujas colunas são as coordenadas dos transformados dos vectores da base de U, em relação à base de V.

Vimos, então, que dada uma transformação linear $G : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, existe uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $G = T_A$. Mais, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{f_1, \ldots, f_m\}$ são as bases canónicas, respectivamente, de $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$, então a matriz A é tal que a coluna i de A são as coordenadas de $G(e_i)$ em relação à base $\{f_1, \ldots, f_m\}$. No entanto, se se considerarem bases que não as canónicas, então é preciso ter um pouco mais de trabalho.

Por exemplo, considere[1] a base B_1 de $\mathbb{R}^3$ constituída pelos vectores $(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)$, e a base B_2 de $\mathbb{R}^2$ constituída pelos vectores $(2, 1), (1, 2)$. Vamos calcular a matriz G que representa $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, com $T(x, y, z) = (x - y, x + y + z)$, nas bases apresentadas. Em primeiro lugar, calculamos as imagens dos elementos da base escolhida:

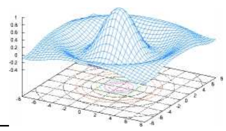
$$\begin{aligned} T(0,1,1) &= (-1,2) = v_1 \\ T(1,1,0) &= (0,2) = v_2 \\ T(1,0,1) &= (1,2) = v_3 \end{aligned}$$

Agora, encontramos as coordenadas de v_1, v_2, v_3 relativamente à base de $\mathbb{R}^2$ que fixámos. Ou seja, encontramos as soluções dos sistemas possíveis determinados[2]

$$Ax = v_1,\ Ax = v_2,\ Ax = v_3,$$

onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. A matriz que representa T em relação às bases apresentadas é $G = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$, onde u_1 é a única solução de $Ax = v_1$, u_2 é a única solução de $Ax = v_2$ e u_3 é a única solução de $Ax = v_3$.

Octave



```
> v1=[-1;2]; v2=[0;2]; v3=[1; 2];
> A=[2 1; 1 2];
> x1=A\v1
x1 =

  -1.3333
   1.6667

> x2=A\v2
x2 =
```

[1]Verifique que de facto formam uma base!

[2]Consegue explicar por que razão os sistemas são possíveis determinados?

```
  -0.66667
   1.33333

> x3=A\v3
x3 =

  -1.8952e-16
   1.0000e+00

> G=[x1 x2 x3]
G =

  -1.3333e+00  -6.6667e-01  -1.8952e-16
   1.6667e+00   1.3333e+00   1.0000e+00
```

Fixadas as bases dos espaços vectoriais envolvidos, a matriz associada à transformação linear G será, doravante, denotada por $[G]$.

Antes de passarmos ao resultado seguinte, consideremos as transformações lineares

$$H: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,y,0) \end{array}, \quad G: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (r,s,t) & \mapsto & 2r-s+t \end{array}$$

Obtemos, então,

$$\begin{aligned} G \circ H(x,y) &= 2(x-y) - 1 \cdot y + 1 \cdot 0 \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= [G][H] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, $[G \circ H] = [G][H]$.

Vejamos o que podemos afirmar em geral:

Teorema 6.3.2. *Sejam U, V, W espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $H : U \to V$, $G : V \to W$ duas transformações lineares. Então*

1. *$G \circ H$ é uma transformação linear;*

2. $G \circ H = T_{[G][H]}$ *e* $[G \circ H] = [G]\,[H]$.

Demonstração. A demonstração de (1) fica como exercício. Para mostrar (2), observe-se que, para qualquer $u \in U$,

$$G \circ H(u) = G(H(u)) = G([H]u) = [G][H]u = T_{[G][H]}u.$$

□

Fechamos, assim, como iniciámos: a algebrização do conjunto das matrizes. As matrizes não são mais do que representantes de um certo tipo de funções (as transformações lineares) entre conjuntos muitos especiais (espaços vectoriais). Se a soma de matrizes corresponde à soma de tranformações lineares (em que a soma de funções está definida como a função definida pela soma das imagens), o produto de matrizes foi apresentado como uma operação bem mais complicada de efectuar. No entanto, a forma como o produto matricial foi definido corresponde à *composição* das transformações lineares definidas pelas matrizes.

Este último capítulo explica, ainda, a razão pela qual não demos ênfase a espaços vectoriais reais de dimensão finita que não os da forma $\mathbb{R}^n$. Mostrámos que todo o espaço vectorial finitamente gerado (ou seja, que tenha uma base com um número finito de elementos) é isomorfo a algum $\mathbb{R}^n$. Já os não finitamente gerados pertencem a outra divisão: são bem mais difíceis de estudar, mas em compensação têm aplicações fantásticas, como o processamento digital de imagem.

Como epílogo, deixamos a seguinte mensagem: a parte interessante da matemática só agora está a começar!

Bibliografia

[1] F. R. Dias Agudo, *Introdução à álgebra linear e geometria analítica*, Escolar Editora, 1996.

[2] Howard Anton, Chris Rorres, *Elementary linear algebra : applications version*, John Wiley & Sons, 1994.

[3] Kenneth J. Beers, *Numerical Methods for Chemical Engineering, Applications in Matlab®*, Cambridge University Press, 2007.

[4] I. S. Duff, A. M. Erisman, J. K. Reid, *Direct methods for sparse matrices*, Oxford University Press, 1989.

[5] Bruce A. Finlayson, *Introduction to Chemical Engineering Computing*, Wiley, 2006.

[6] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, *Linear Algebra (2nd edition)*, Prentice-Hall International, Inc., 1989.

[7] Emília Giraldes, Vitor Hugo Fernandes, M. Paula Marques Smith, *Curso de álgebra linear e geometria analítica*, McGraw-Hill, 1995.

[8] David R. Hill, David E. Zitarelli, *Linear algebra labs with MATLAB*, Prentice Hall, 1996

[9] Roger Horn, Charles Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[10] Peter Lancaster, Miron Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, second edition with applications, Academic Press, 1985.

[11] Christopher Lawrence, Dirk Eddelbuettel, Quantian: A Comprehensive Statistical Computing Environment, `http://dirk.eddelbuettel.com/papers/quantian-tpm.pdf`.

[12] P.J.G. Long, *Introduction to Octave*, Department of Engineering, University of Cambridge, 2005, `www-mdp.eng.cam.ac.uk/CD/engapps/octave/octavetut.pdf`

[13] Luís T. Magalhães, *Álgebra Linear como introdução à matemática aplicada*, IST, 1987.

[14] Guillem Borrell i Nogueras, *Introducción informal a Matlab y Octave*, `http://torroja.dmt.upm.es:9673/Guillem_Site/`

[15] J. M. Powers, *Method of least squares*, University of Notre Dame, 2003, `http://www.nd.edu/~powers/ame.332/leastsquare/leastsquare.pdf`

[16] Ana Paula Santana, João Filipe Queiró, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2003, `http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/ALGA2003.pdf`

[17] Hubert Selhofer, *Introduction to GNU Octave*, `http://math.iu-bremen.de/oliver/teaching/iub/resources/octave/octave-intro.pdf`.

[18] Gilbert Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, 1976.

[19] Maria Raquel Valença, *Métodos numéricos*, INIC, 1990.