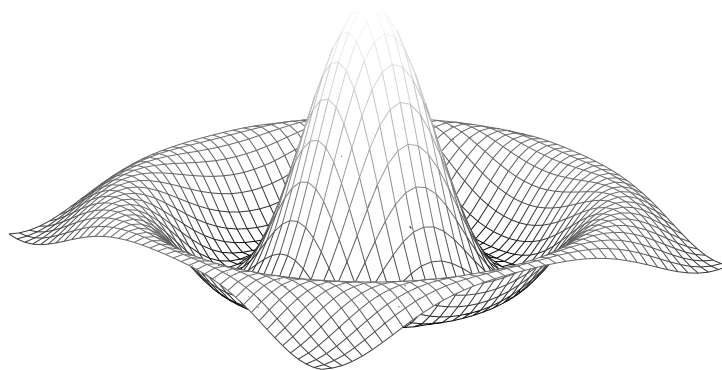


INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
COM O *gnu-Octave*



Pedro Patrício
Departamento de Matemática
Universidade do Minho
`pedro@math.uminho.pt`

Notas de apoio para MiEB
2007/2008

Conteúdo

1	Introdução	5
2	Cálculo Matricial	11
2.1	Notação matricial	11
2.2	Operações matriciais	16
2.2.1	Soma e produto escalar	16
2.2.2	Produto	17
2.2.3	Transposição	19
2.2.4	Invertibilidade	22
2.3	Um resultado de factorização de matrizes	28
2.3.1	Matrizes elementares	28
2.3.2	O Algoritmo de Eliminação de Gauss	37
2.4	Determinantes	44
2.4.1	Definição	44
2.4.2	Propriedades	45
2.4.3	Teorema de Laplace	49
3	Sistemas de equações lineares	53
3.1	Formulação matricial	53
3.2	Resolução de $Ax = b$	54
3.3	Algoritmo de Gauss-Jordan	63
3.4	Regra de Cramer	65
4	Espaços vectoriais	67
4.1	Definição e exemplos	67
4.2	Independência linear	69
4.3	Bases de espaços vectoriais finitamente gerados	71
4.4	\mathbb{R}^n e seus subespaços (vectoriais)	75
4.4.1	Brincando com a característica	89
4.4.2	Aplicação a sistemas impossíveis	89
5	Valores e vectores próprios	97
5.1	Motivação e definições	97

5.2	Propriedades	100
5.3	Matrizes diagonalizáveis	101
6	Transformações lineares	109
6.1	Definição e exemplos	109
6.2	Propriedades das transformações lineares	110
6.3	Matriz associada a uma transformação linear	114
	Bibliografia	121

Capítulo 1

Introdução

O ano lectivo 2006/07 presenciou a reestruturação da Licenciatura em Engenharia Biológica no Mestrado Integrado em Engenharia Biológica, em consonância com o Tratado de Bolonha. Como consequência, a disciplina “Álgebra Linear e Geometria Analítica” viu-se substituída pela unidade curricular “Álgebra Linear C”, onde o símbolo “C” tem como único propósito diferenciá-la das outras unidades curriculares semelhantes (mas que são distintas) existentes na Universidade do Minho. Na reestruturação do curso, a unidade curricular a que estas notas se referem pressupõe o recurso a uma ferramenta computacional, tendo a direcção de curso apoiado a escolha do MatLab. No que se segue, tentar-se-á complementar o estudo teórico dos assuntos com exemplos recorrendo à ferramenta computacional. Embora existam recursos que possibilitem aos alunos o uso do MatLab, estes são escassos. Tal levou a que, com o acordo da direcção de curso, se optasse pelo gnu-Octave.

A utilização de um *software livre* possibilita aos alunos a obtenção *legal* de software para o seu estudo diário, nos seus computadores pessoais. O Octave é unanimemente referenciado como um clone¹ do MatLab, distribuído segundo a licença GPL (*General Public License*), existente para várias plataformas, podendo encontrar na *internet* diversas fontes de informação sobre (in)compatibilidades entre os dois. Outras considerações e preocupações estão descritas em http://torroja.dmt.upm.es:9673/Guillem_Site/, nomeadamente nos Apêndices C e D.

Listam-se alguns endereços úteis:

- Octave Wiki :

<http://wiki.octave.org/>

- Download da pagina oficial:

<http://www.gnu.org/software/octave/download.html>

- Octave Workshop para MS-Windows (ambiente gráfico atraente, mas com alguns *bugs* irritantes:

¹Sugerimos a leitura atenta de http://www.macresearch.org/octave_a_free_matlab_clone_and_a_bit_more.

<http://www.math.mcgill.ca/loisel/octave-workshop/>

- Octave para MS-Windows @ sourceforge (a forma mais fácil de obter o Octave para Windows:

http://sourceforge.net/project/showfiles.php?group_id=2888

As versões do Octave usadas nos exemplos apresentados são a 2.1.73 e a 2.9.14 (x86_64-pc-linux-gnu). Foram essencialmente desenvolvidos em linux-Gentoo, em linux-Debian e em linux-Ubuntu, e (muito) ocasionalmente testados no Octave-Workshop (em Windows).

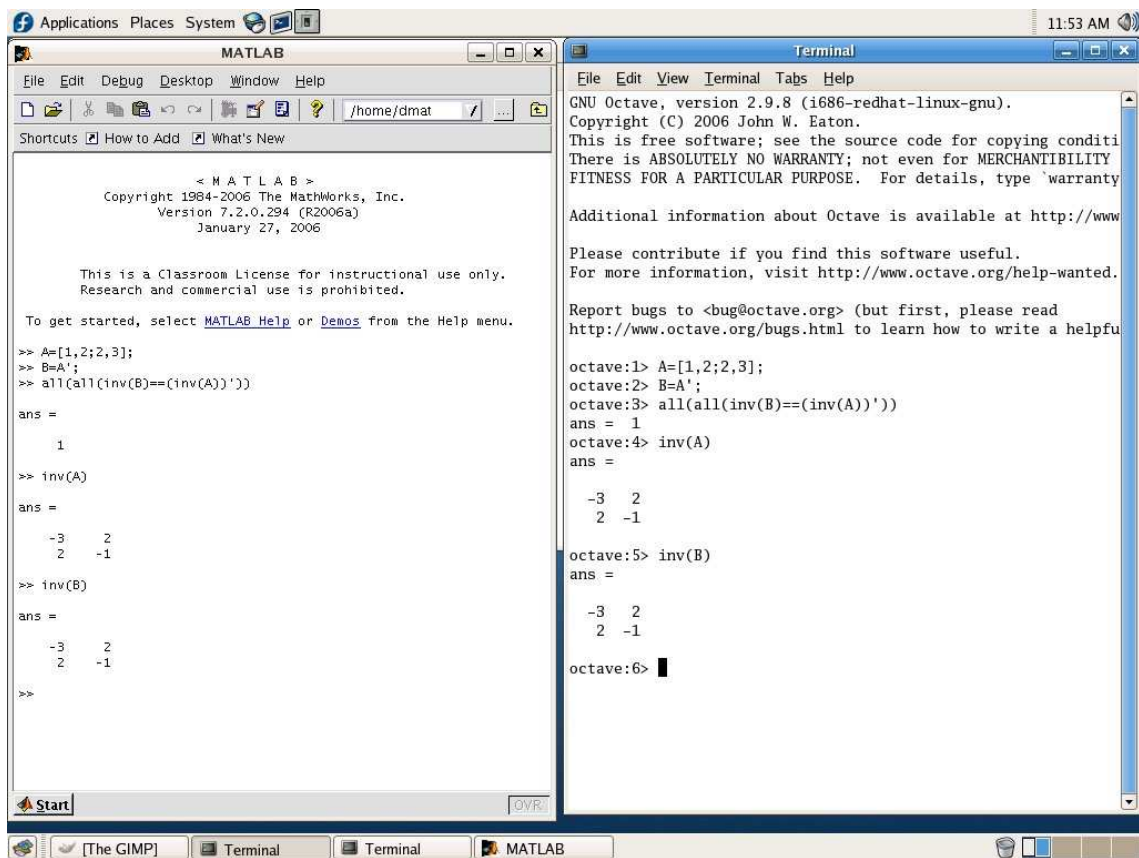


Figura 1.1: MatLab e Octave lado a lado, em Linux (no caso, Fedora 5, usado nos laboratórios do Dep. Matemática)

Visualmente, a grande diferença que nos é permitido identificar entre o Octave e o MatLab é o ambiente gráfico que usam. O Matlab funciona num ambiente gráfico, sendo portanto um GUI (*graphics user interface*), enquanto que o Octave é um CLI (*command line interface*).

Aliás, só a partir do Matlab 6.0 se adoptou um ambiente gráfico para o MatLab. Existem, acrescente-se, variantes do Octave que o transformam num GUI. Um exemplo bem sucedido é o Octave Workshop a que fizemos referência atrás.

```

mint@bracara2: ~ - Shell No. 3 - Konsole
Session Edit View Bookmarks Settings Help
GNU Octave, version 2.1.73 (i486-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 2006 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  For details, type `warranty'.

Additional information about Octave is available at http://www.octave.org.

Please contribute if you find this software useful.
For more information, visit http://www.octave.org/help-wanted.html

Report bugs to <bug@octave.org> (but first, please read
http://www.octave.org/bugs.html to learn how to write a helpful report).

octave:1> A=[1 2; 2 3];
octave:2> rank(A)
ans = 2
octave:3> inverse(A)
ans =

  -3   2
   2  -1

octave:4>

```

Figura 1.2: Octave 2.1.73 num ambiente Linux (LinuxMint, baseado no Ubuntu)

Existem também implementações gráficas do Octave para ambientes Linux. Um exemplo é o Koctave.

Independentemente da plataforma que usar, é (quase) sempre possível instalar o octave na sua máquina. Sendo um *software* distribuído sob a licença GPL, o código-fonte está disponível a qualquer utilizador. Precisar, apenas, de um compilador `gcc` para instalar o Octave. Este processo está simplificado no Workshop, fazendo-se uso de um instalador executável. Se utilizar linux, o octave é instalado de uma forma ainda mais simples. Se usar a distribuição Ubuntu (<http://www.ubuntu.com>) ou uma sua derivada, ou ainda Debian ou sua derivada, então num terminal faça a actualização da lista de pacotes disponíveis: `sudo apt-get update`. Instale, de seguida, o octave:

```
sudo apt-get install octave2.1
```

Em alternativa, use o *synaptic* para gerir, de uma forma gráfica, os pacotes instaláveis no seu sistema. Para tirar partido das capacidade gráficas do Octave tem que instalar o `gnuplot`.

Se usar Gentoo (<http://www.gentoo.org>) ou uma distribuição sua derivada, não se esqueça (num terminal, como *root*) de sincronizar a lista de pacotes do *portage*: `emerge --sync`. Depois, verifique se há conflitos fazendo `emerge -p octave`. Pacotes adicionais do octave

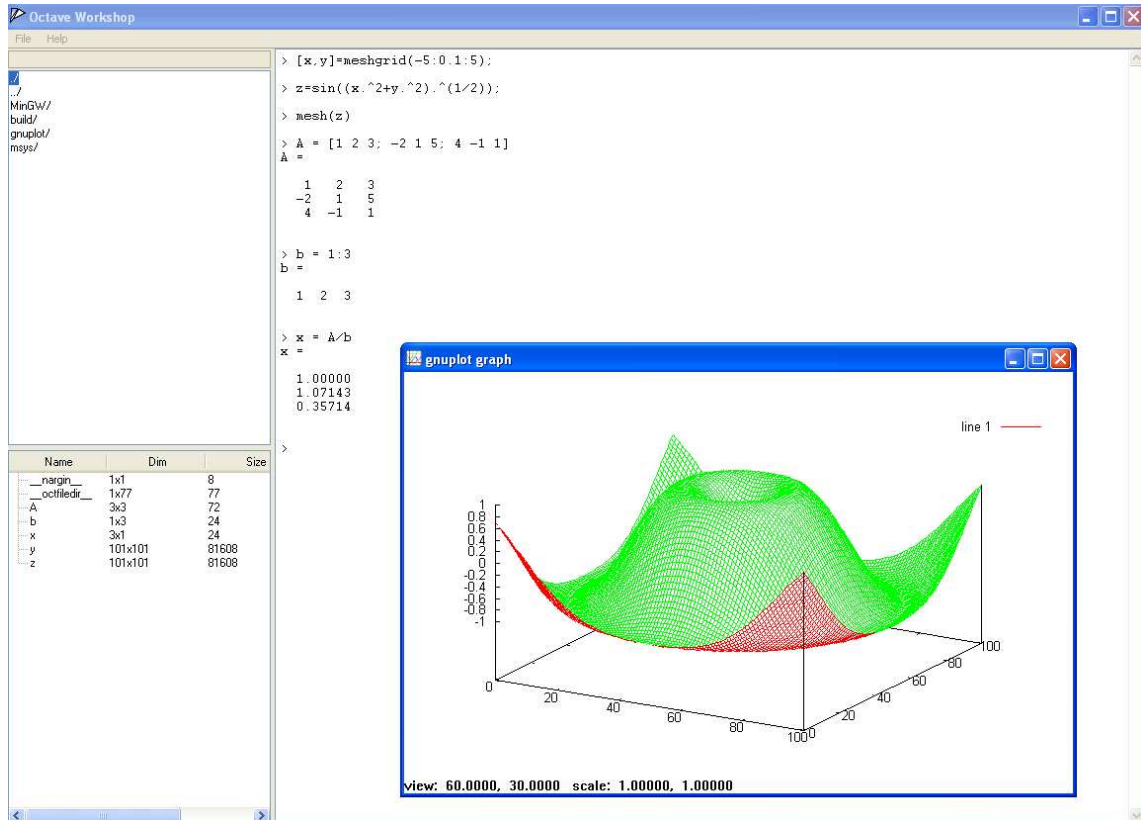


Figura 1.3: Octave Workshop num MS-Windows XP

podem ser consultados fazendo `emerge -s octave`. Finalmente, instale o octave fazendo `emerge octave`. Em alternativa, pode usar o `Portato` para gerir, de uma forma gráfica, os pacotes instaláveis no seu sistema.

É possível ter, numa mesma máquina, dois sistemas operativos, usando aquele que nos realiza melhor certo tipo de tarefas. Mas se quiser manter intacto o seu sistema que não é *nix, então uma boa opção é a exploração dos *LiveCD/DVD*. Coloque o *LiveCD/DVD* na sua máquina e reinicialize-a. Terá, de imediato, um sistema linux a funcionar, embora não possa fazer quaisquer tipo de actualizações ou intalação de *software*. Mas a partir daqui pode, se tal for seu intento, instalá-lo na sua máquina. Existem várias distribuições que possuem um *LiveCD/LiveDVD*, ou seja, que prescindem de instalação em disco rígido, e que contêm o Octave, bem como outras aplicações matemáticas como o R, o YaCaS ou o GAP. Apresenta-se uma lista não exaustiva de sítios onde pode conhecer mais sobre algumas dessas distribuições.

<http://dirk.eddelbuettel.com/quantian.html>

<http://poseidon.furg.br/>

<https://www.scientificlinux.org/>

<http://taprobane.org/>

E pronto: se tudo correu como planeado tem à sua disposição o Octave, uma ferramenta

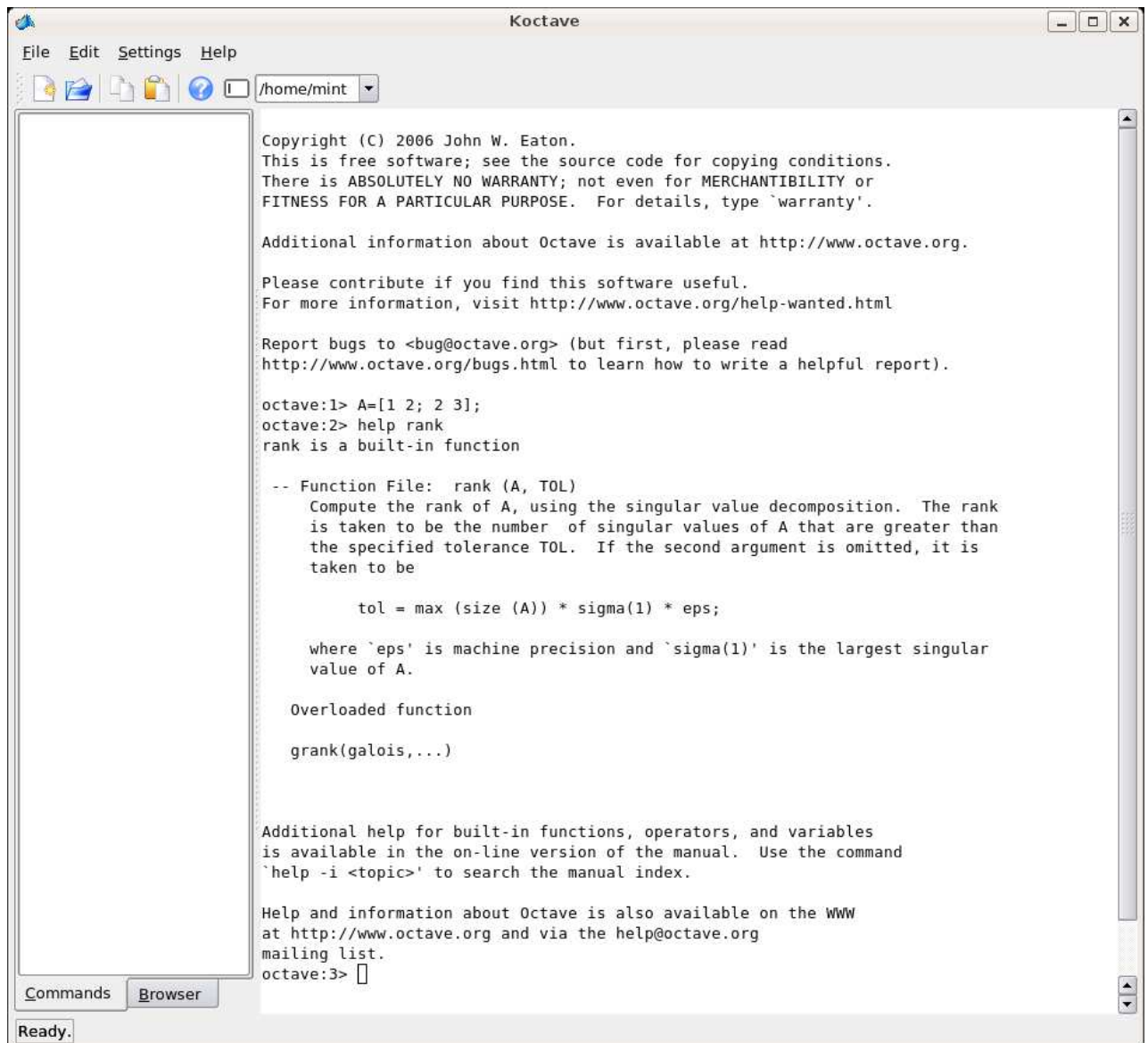


Figura 1.4: Koctave num ambiente linux

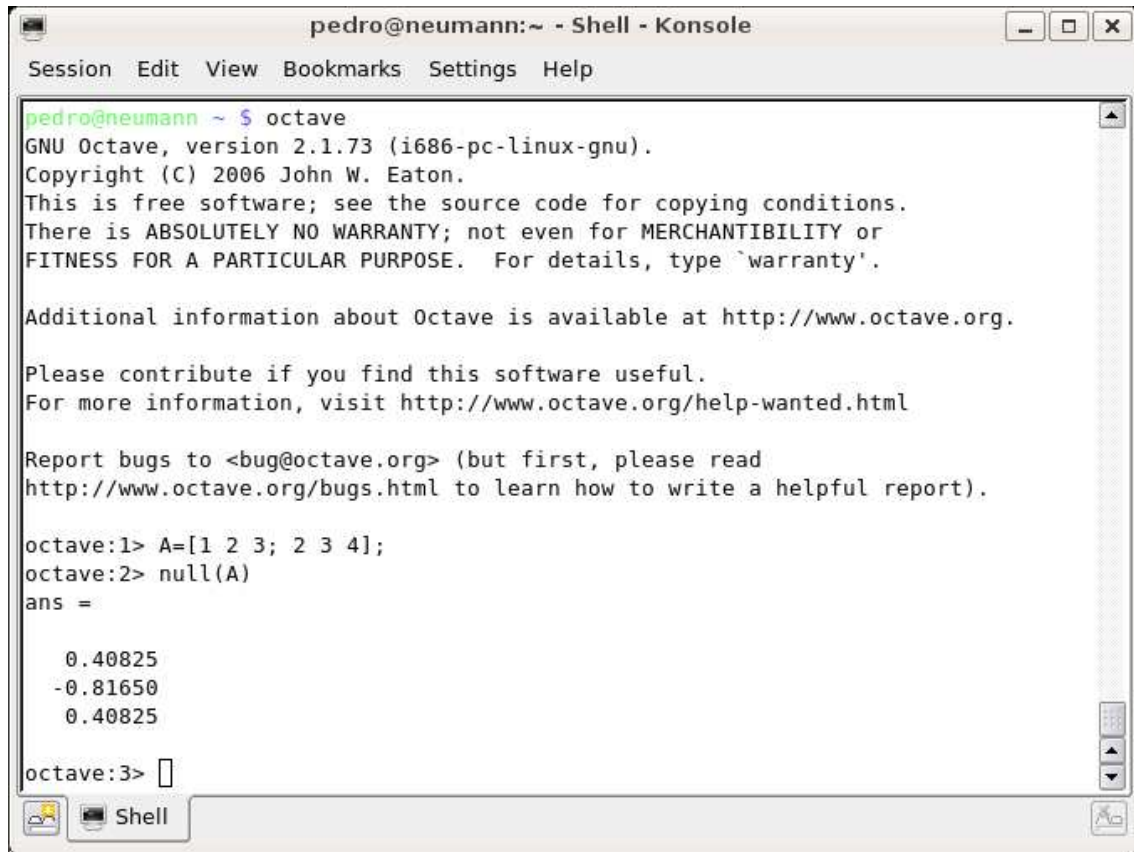
computacional numérica que iremos, nos capítulos que se seguem, usar no estudo elementar de Álgebra Linear. Pode ir registando os comandos e respostas num ficheiro de texto fazendo

```
> diary on
```

Para dar ordem de fim de escrita no ficheiro, faça

```
> diary off
```

Tem, neste momento, tudo o que precisa para estudar e gostar de Álgebra Linear. Tal como todas as áreas de Matemática (de facto, de qualquer ramo da ciência) à sua inspiração



```
pedro@neumann:~ - Shell - Konsole
Session Edit View Bookmarks Settings Help

pedro@neumann ~ $ octave
GNU Octave, version 2.1.73 (i686-pc-linux-gnu).
Copyright (C) 2006 John W. Eaton.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type `warranty'.

Additional information about Octave is available at http://www.octave.org.

Please contribute if you find this software useful.
For more information, visit http://www.octave.org/help-wanted.html

Report bugs to <bug@octave.org> (but first, please read
http://www.octave.org/bugs.html to learn how to write a helpful report).

octave:1> A=[1 2 3; 2 3 4];
octave:2> null(A)
ans =

    0.40825
   -0.81650
    0.40825

octave:3> 
```

Figura 1.5: Octave num ambiente linux, no caso Gentoo

tem que aliar estudo. Sugerimos que vá explorando os exemplos apresentados nestas notas com o Octave, e que compreenda o raciocínio descrito.

Boa sorte! Correções, comentários e sugestões são bem-vindos.