Universidade do Minho MiEB

Departamento de Matemática

Álgebra Linear C

folha ii 2007/2008

1. A matriz real A do tipo 3×4 foi gerada aleatoriamente no Octave pela instrução

```
> A=fix(100*rand(3,4)-50);
```

Calcule $(A^T)^T$, AA^T e A^TA, para várias escolhas de A. O que pode conjecturar? Tente provar essas afirmações.

2. Considere as matrizes A, B geradas no Octave pelos comandos

```
> A=fix(100*rand(4,4)-50);  B=fix(100*rand(4,4)-50);
```

(a) Após calcular, para várias escolhas de A e B, as matrizes $(AB)^T, A^TB^T$ e B^TA^T, o que pode inferir?

(b) Compare A^5B^5 com $(AB)^5$, para várias escolhas de A e B. O que pode concluir?

(c) Compare $A^2 + 2AB + B^2$ com $(A + B)^2$, para várias escolhas de A e B. O que pode concluir?

(d) Compare $A^2 - B^2$ com $(A + B)(A - B)$, para várias escolhas de A e B. O que pode concluir?

(e) Indique o valor lógico das afirmações seguintes, justificando:

i. Se A, B são matrizes quadradas das mesma ordem então $(AB)^n = A^nB^n$

ii. Se A, B são matrizes quadradas das mesma ordem então $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

iii. Se A, B são matrizes quadradas das mesma ordem então $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

3. As matrizes D_1, D_2 do tipo 4×4 foram geradas aleatoriamente no Octave através das instruções

```
> d=fix(100*rand(1,4)-50);
> D1=diag(d);
> d=fix(100*rand(1,4)-50);
> D2=diag(d);
```

Para várias escolhas de D_1 e D_2, calcule e procure inferir algo sobre

(a) D_1^4.

(b) D_1D_2 e D_2D_1

4. Para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

calcule A^n, com $n > 1$.

5. Sejam E, P, D as matrizes 3×3 definidas por

```
> I3=eye(3);
> E=I3; E(3,1)=-2;
> P=I3; P(1,:)=I3(2,:); P(2,:)=I3(1,:);
> D=I3; D(2,2)=2;
```

(a) Descreva como foram obtidas à custa das linhas/colunas da matriz I_3

(b) Indique a inversa de cada uma.

(c) Considere $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$. Faça os produtos DA, EA, PA. Relacione-as com A. Recorde o que fez na alínea (a).

(d) Repita a alínea anterior, mas agora com os produtos AD, AE, AP.

6. Considere as matrizes $E_{21}(-2), E_{31}(-1), E_{32}(2)$ do tipo 3×3. Considere ainda a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 8 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

(a) Relacione os produtos $E_{21}(-2)A, E_{31}(-1)A, E_{32}(2)A$ e os produtos $AE_{21}(-2)$, $AE_{31}(-1)$ e $AE_{32}(2)$ com A.

(b) Indique uma matriz P_1 tal que $P_1 A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Verifique no Octave.

(c) Indique uma matriz P_2 tal que $AP_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$. Verifique no Octave.

(d) Indique uma matriz D_1 tal que $D_1 A$ é a matriz obtida de A cuja segunda linha surge dividida por 2. Verifique no Octave.

(e) Indique uma matriz D_2 tal que AD_2 é a matriz obtida de A cuja terceira coluna surge multiplicada por 4. Verifique no Octave.

7. Considere a matriz `A=[8 2 3; 4 3 2; 1 -2 1]`.

(a) Calcule $B = E_{21}(-\frac{1}{2})A$.

(b) Indique uma matriz elementar da forma $E_{ij}(\alpha)$ tal que $C = E_{ij}(\alpha)B$ seja uma matriz com as entradas $(2,1)$ e $(3,1)$ nulas, onde $i = 1,2$.

(c) Indique uma matriz elementar E tal que EC é uma matriz triangular superior.

(d) Indique uma matriz invertível K triangular inferior tal que KA é triangular superior.

(e) Mostre existe uma matriz triangular superior U e L triangular inferior invertível para as quais $A = LU$.

(f) Conclua que a matriz A é invertível.

8. Considere a matriz `A=[2 4 3; -1 4 0; 3 1 1]`.

   (a) Indique uma matriz invertível K triangular inferior tal que KA é triangular superior.

   (b) Mostre existe uma matriz triangular superior U e L triangular inferior invertível para as quais $A = LU$.

   (c) Conclua que a matriz A é invertível.

9. Considere a matriz `A=[0 2 1; -1 2 1; 1 0 1]`

   (a) Indique uma matriz P tal que `P*A=[ -1 2 1; 0 2 1; 1 0 1]`.

   (b) Indique uma matriz invertível K triangular inferior tal que KPA é triangular superior.

   (c) Mostre existe uma matriz triangular superior U e L triangular inferior invertível para as quais $PA = LU$.

   (d) Conclua que a matriz A é invertível.

10. (a) Mostre que $E_{31}(2)P_{23} = P_{23}E_{21}(2)$.

   (b) Mostre que $E_{32}(1)P_{13} = P_{13}E_{12}(1)$.

   (c) Indique uma matriz permutação P e uma matriz elementar da forma $E_{ij}(\alpha)$ para as quais $E_{21}(-3)P_{23} = PE_{ij}(\alpha)$.

   (d) Indique uma matriz permutação P e uma matriz elementar da forma $E_{ij}(\alpha)$ para as quais $P_{32}E_{21}(-1) = E_{ij}(\alpha)P$.

11. Considere a matriz `A=[1 2 3; 2 4 7; -1 1 2]`.

   (a) Indique uma matriz K, à custa de produtos de matrizes elementares, tal que KA é triangular superior.

   (b) Deduza que A é invertível.

   (c) Factorize $K = \tilde{P}E$, onde $\tilde{P}$ é uma matriz permutação e E é triangukar inferior.

   (d) Mostre existe uma matriz permutação P, uma triangular superior U e L triangular inferior invertível para as quais $PA = LU$.

12. Encontre uma factorização da forma $PA = LU$ para `A=[0 1 0 2; 0 -1 0 2; 1 0 0 1]`.

13. †Sejam A, B matrizes 2×2 reais tais que

$$AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Mostre que $a + d = 0$.

14. †Indique todas as matrizes X, Y reais 2×2 para as quais, simultaneamente,

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

15. †Seja A uma matriz $m \times n$ tal que $AB = 0$, para todas as matrizes B do tipo $n \times 1$. Mostre que $A = 0$.

16. †Seja

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Mostre que $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow AB \in \mathcal{G}$.

(b) Mostre que quaisquer dois elementos de $\mathcal{G}$ comutam entre si.

17. †Calcule $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^3$, sabendo que

$$\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

18. †Seja N uma matriz $n \times n$ nilpotente, i.e., existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k = 0$.

(a) Mostre que N não é invertível.

(b) Mostre que

$$(I_n - N)^{-1} = I_n + \sum_{i=1}^{k-1} N^i.$$

(c) Se A e N comutam entre si, mostre que $I_n + AN$ é invertível.