Capítulo 4

Espaços vectoriais

Tal como nos resultados apresentados anteriormente, $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Definição e exemplos

Definição 4.1.1. *Um conjunto não vazio V é um* espaço vectorial *sobre $\mathbb{K}$ (ou espaço linear) se lhe estão associadas duas operações, uma adição de elementos de V e uma multiplicação de elementos de $\mathbb{K}$ por elementos de V, com as seguintes propriedades:*

1. Fecho da adição: $\forall_{x,y\in V}, x+y\in V$;
2. Fecho da multiplicação por escalares: $\forall_{x\in V}, \alpha\in\mathbb{K}, \alpha x\in V$;
3. Comutatividade da adição: $x+y=y+x$, *para* $x,y\in V$;
4. Associatividade da adição: $x+(y+z)=(x+y)+z$, *para* $x,y,z\in V$;
5. Existência de zero: *existe um elemento de V, designado por 0, tal que $x+0=x$, para $x\in V$;*
6. Existência de simétricos: $\forall_{x\in V}, x+(-1)\,x=0$;
7. Associatividade da multiplicação por escalares: $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K},x\in X}, \alpha\,(\beta x)=(\alpha\beta)\,x$;
8. Distributividade: $\alpha\,(x+y)=\alpha x+\alpha y$ *e* $(\alpha+\beta)\,x=\alpha x+\beta x$, *para* $x,y\in V$ *e* $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$;
9. Existência de identidade: $1x=x$, *para todo* $x\in V$.

Se V é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, um subconjunto não vazio $W\subseteq V$ que é ele também um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ diz-se um subespaço vectorial *de V.*

Por forma a aligeirar a escrita, sempre que nos referirmos a um subespaço de um espaço vectorial queremos dizer subespaço vectorial.

Dependendo se o conjunto dos escalares $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o espaço vectorial diz-se, respectivamente, real ou complexo.

Apresentam-se, de seguida, alguns exemplos comuns de espaços vectoriais.

1. O conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, com a soma de matrizes e produto escalar definidos no início da disciplina, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

2. Em particular, $\mathbb{K}^n$ é um espaço vectorial.

3. O conjunto $\{0\}$ é um espaço vectorial.

4. O conjunto das sucessões de elementos de $\mathbb{K}$, com a adição definida por $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$ e o produto escalar por $\alpha\{x_n\} = \{\alpha\, x_n\}$, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Este espaço vectorial é usualmente denotado por $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

5. Seja $V = \mathbb{K}[x]$ o conjunto dos polinómios na indeterminada x com coeficientes em $\mathbb{K}$. Definindo a adição de vectores como a adição usual de polinómios e a multiplicação escalar como a multiplicação usual de um escalar por um polinómio, V é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

6. Dado $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{K}_n[x]$ dos polinómios de grau inferior a n, com as operações definidas no exemplo anterior, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

7. Seja $V = \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ o conjunto das aplicações de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$ (isto é, $V = \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}\}$). Definindo, para $f, g \in V, \alpha \in \mathbb{K}$, a soma e produto escalar como as aplicações de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$ tais que, para $x \in \mathbb{K}$,
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,,\ (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))\,,$$
V é desta forma um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

8. O conjunto $\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] é também um espaço vectorial sobre ele próprio.

9. Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e S um conjunto qualquer. O conjunto V^S de todas as funções de S em V é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,,\ (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))\,,$$
onde $f, g \in V^S, \alpha \in \mathbb{K}$.

10. Dado um intervalo real $]a, b[$, o conjunto $C]a, b[$ de todas as funções reais contínuas em $]a, b[$, para as operações habituais com as funções descritas acima, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. O conjunto $C^k]a, b[$ das funções reais com derivadas contínuas até à ordem k no intervalo $]a, b[$ e o conjunto $C^\infty]a, b[$ das funções reais infinitamente diferenciáveis no intervalo $]a, b[$ são espaços vectoriais reais.

Teorema 4.1.2. *Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $W \subseteq V$. Então W é um subespaço de V se e só se as condições seguintes forem satisfeitas:*

1. $W \neq \emptyset$;

2. $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$;

3. $v \in W, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha v \in W$.

Observe que se W é subespaço de V então **necessariamente** $0_v \in W$.
Alguns exemplos:

1. Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $C^\infty]a,b[$ é um subespaço de $C^k]a,b[$, que por sua vez é um subespaço de $C]a,b[$.

2. O conjunto das sucessões reais convergentes é um subespaço do espaço das sucessões reais.

3. $\mathbb{K}_n[x]$ é um subespaço de $\mathbb{K}[x]$.

4. o conjunto das matrizes $n \times n$ triangulares inferiores (inferiores ou superiores) é um subespaço de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, onde $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ denota o espaço vectorial das matrizes quadradas de ordem n sobre $\mathbb{K}$.

4.2 Independência linear

Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $\{v_i\}_{i\in I} \subseteq V, \{\alpha_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{K}$. Se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

diz-se que v é uma *combinação linear* dos vectores $v_1, \ldots, v_n$. Neste caso, dizemos que v se pode escrever como *combinação linear* de $v_1, \ldots, v_n$.

Definição 4.2.1 (Conjunto linearmente independente)**.** *Um conjunto não vazio* $\{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ *diz-se* linearmente independente *se*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i v_i = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Um conjunto diz-se linearmente dependente se não for linearmente independente.

Por abuso de linguagem, tomaremos, em algumas ocasiões, vectores linearmente independentes para significar que o conjunto formado por esses vectores é linearmente independente.

O conceito de dependência e independência linear é usualmente usado de duas formas.

(i) Dado um conjunto não vazio $\{v_i\}$ de n vectores linearmente dependentes, então é possível escrever o vector nulo como combinação linear não trivial de $v_1, \ldots, v_n$. Ou seja, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, algum ou alguns dos quais não nulos, tais que

$$0 = \sum_{i=n}^{n} \alpha_i v_i.$$

Seja α_k um coeficiente não nulo dessa combinação linear. Então

$$v_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left(-\alpha_k^{-1}\alpha_i\right) v_i.$$

Concluindo, dado um conjunto de vectores linearmente dependentes, então pelo menos um desses vectores é uma combinação linear (não trivial) dos outros vectores.

(ii) Dado um conjunto não vazio $\{v_i\}$ de n vectores linearmente independentes, da relação

$$0 = \sum_{i=n}^{n} \alpha_i v_i$$

podemos concluir de forma imediata e óbvia que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Esta implicação será muito útil ao longo desta disciplina.

Algumas observações:

1. Considerando o espaço vectorial $\mathbb{K}[x]$, o conjunto dos monómios $\{1, x, x^2, \dots\}$ é constituído por elementos linearmente independentes. Já $1, x, x^2, x^2+x+1$ são linearmente dependentes, visto
$$1 + x + x^2 - \left(x^2 + x + 1\right) = 0.$$
2. Em $\mathbb{K}_n[x]$, quaisquer $n+1$ polinómios são linearmente dependentes.
3. Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os vectores $\alpha = (1,1,0), \beta = (1,0,1), \gamma = (0,1,1), \delta = (1,1,1)$. Estes quatro vectores são linearmente dependentes (pois $\alpha + \beta + \gamma - 2\delta = 0$), apesar de quaisquer três deles serem linearmente independentes.

Teorema 4.2.2. *Sejam $v_1, \dots, v_n$ elementos linearmente independentes de um espaço vectorial V. Sejam ainda $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Então $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ então

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0,$$

pelo que, usando o facto de $v_1, \dots, v_n$ serem linearmente independentes, se tem $\alpha_i - \beta_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. □

O resultado anterior mostra a *unicidade* da escrita de um vector como combinação linear de elementos de um conjunto linearmente independente, caso essa combinação linear exista.

Teorema 4.2.3. *Seja A um subconjunto não vazio de um espaço vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Então o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de A é um subespaço vectorial de V.*

Demonstração. Seja A' o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de A. A' é obviamente não vazio visto $A \neq \emptyset$. Sejam $u, v \in A'$. Ou seja,

$$u = \sum_{i \in I} \alpha_i a_i, \ v = \sum_{j \in J} \beta_j a_j,$$

para alguns $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, com $a_i \in A$. Note-se que

$$u + v = \sum_{i \in I} \alpha_i a_i + \sum_{j \in J} \beta_j a_j$$

e portanto $u + v$ é assim uma combinação linear de elementos de A – logo, $u + v \in A'$. Para $\kappa \in \mathbb{K}$, temos que $\kappa u = \sum_{i \in I}^{n} \kappa \alpha_i a_i$ e portanto $\kappa u \in A'$. □

Tendo em conta o teorema anterior, podemos designar o conjunto das combinações lineares dos elementos de A como o *espaço gerado* por A. Este espaço vectorial (subespaço de V) denota-se por $\langle A \rangle$.

Quando o conjunto A está apresentado em extensão, então não escrevemos as chavetas ao denotarmos o espaço gerado por esse conjunto. Por exemplo, se $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, então $\langle A \rangle$ pode-se escrever como $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Por notação, $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

É importante referir os resultados que se seguem, onde V indica um espaço vectorial.

1. Os vectores não nulos $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ são linearmente independentes se e só se, para cada k, $v_k \notin \langle v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$.

2. Sejam $A, B \subseteq V$.

   (a) Se $A \subseteq B$ então $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.

   (b) $\langle A \rangle = \langle \langle A \rangle \rangle$.

   (c) $\langle A \rangle$ é o menor (para a relação de ordem $\subseteq$) subespaço de V que contém A.

4.3 Bases de espaços vectoriais finitamente gerados

Definição 4.3.1. *Seja V um espaço vectorial.*

Um conjunto $\mathcal{B}$ linearmente independente tal que $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ é chamado de base *de V.*

A demonstração do resultado que se segue envolve, no caso geral, diversos conceitos matemáticos (nomeadamente o Lema de Zorn) que ultrapassam em muito os propósitos desta disciplina. No entanto, o resultado garante, para qualquer espaço vectorial, a existência de um conjunto linearmente independente $\mathcal{B}$ que gere o espaço vectorial.

Teorema 4.3.2. *Todo o espaço vectorial tem uma base.*

Dizemos que V tem *dimensão finita*, ou que é *finitamente gerado*, se tiver uma base com um número finito de elementos. Caso contrário, diz-se que V tem *dimensão infinita*.

V tem *dimensão finita nula* se $V = \{0\}$.

De ora em diante, apenas consideraremos espaços vectoriais finitamente gerados. Por vezes faremos referência à base $v_1, v_2, \ldots, v_n$ para indicar que estamos a considerar a base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Definição 4.3.3. *Uma base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de V cujos elementos estão dispostos por uma ordem fixa*[1]*. Chamam-se* componentes *ou* coordenadas *de $u \in V$ na base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ aos coeficientes escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ da combinação linear*

$$u = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k.$$

As coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ são denotadas[2] por

$$(u)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Recordemos que, se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é uma base de V, em particular são linearmente independentes, e portanto dado $v \in V$, os coeficientes de v na base $\mathcal{B}$ são únicos.

Teorema 4.3.4. *Se um espaço vectorial tem uma base com um número finito n de elementos, então todas as bases de V têm n elementos.*

Demonstração. Seja V um espaço vectorial e $v_1, \ldots, v_n$ uma base de V. Seja $w_1, \ldots, w_m$ outra base de V com m elementos.

Como $v_1, \ldots, v_n$ é base de V, existem $\alpha_{ji} \in \mathbb{K}$ para os quais

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j.$$

[1] De uma forma mais correcta, $\mathcal{B}$ não deveria ser apresentado como conjunto, mas sim como um n-uplo: $(v_1, \ldots, v_m)$. Mas esta notação poder-se-ia confundir com a usada para denotar elementos de $\mathbb{R}^n$, por exemplo. Comete-se assim um abuso de notação, tendo em mente que a notação escolhida indica a ordem dos elementos da base pelos quais foram apresentados.

[2] A notação adoptada não significa que $u \in \mathbb{R}^n$.

Note-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} x_i w_i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \alpha_{ji} v_j = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_{ji} \right) v_j = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_{ji} = 0, \text{ para todo } j \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} \alpha_{ji} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array} \right] = 0
\end{aligned}$$

e que

$$\sum_{i=1}^{m} x_i w_i = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0.$$

Portanto,

$$\left[\begin{array}{c} \alpha_{ji} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array} \right] = 0$$

é um sistema *determinado*, pelo que

$$m = \operatorname{car}\left(\left[\begin{array}{c} \alpha_{ji} \end{array} \right] \right) \leq n.$$

Trocando os papéis de $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ e de $\langle w_1, \ldots, w_m \rangle$, obtemos $n \leq m$. Logo, $n = m$. □

Definição 4.3.5. *Seja V um espaço vectorial. Se existir uma base de V com n elementos, então diz-se que V tem dimensão n, e escreve-se* $\dim V = n$.

Corolário 4.3.6. *Seja V um espaço vectorial com* $\dim V = n$. *Para $m > n$, qualquer conjunto de m elementos de V é linearmente dependente.*

Demonstração. A demonstração segue a do teorema anterior. □

Considerando o espaço vectorial $\mathbb{K}_n[x]$ dos polinómios com coeficientes em $\mathbb{K}$ e grau não superior a n, uma base de $\mathbb{K}_n[x]$ é

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, x, x^2, \ldots, x^n \right\}.$$

De facto, qualquer polinómio de $\mathbb{K}_n[x]$ tem uma representação única na forma $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ e portanto B gera $\mathbb{K}_n[x]$, e $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Logo, $\dim \mathbb{K}_n[x] = n + 1$. Como exercício, mostre que

$$\mathcal{B}' = \left\{ 1, x + k, (x + k)^2, \ldots, (x + k)^n \right\},$$

para um $k \in \mathbb{K}$ fixo, é outra base de $\mathbb{K}_n[x]$.

Considere agora o conjunto $\{\Delta_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, onde Δ_{ij} é a matriz $m \times n$ com as entradas todas nulas à excepção de (i, j) que vale 1. Este conjunto é uma base do espaço vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, pelo que $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$.

Teorema 4.3.7. *Seja V um espaço vectorial com $\dim V = n$.*

1. *Se $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes em V, então $v_1, \ldots, v_n$ formam uma base de V.*
2. *Se $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$, então $v_1, \ldots, v_n$ formam uma base de V.*

Demonstração. (1) Basta mostrar que $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$. Suponhamos, por absurdo, que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, e que $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle \subsetneq V$. Ou seja, existe $0 \neq w \in V$ para o qual $w \notin \langle v_1, \ldots, v_n\rangle = V$. Logo, $v_1, \ldots, v_n, w$, são linearmente independentes, pelo que em V existem $n + 1$ elementos linearmente independentes, o que contradiz o corolário anterior.
(2) Basta mostrar que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. Suponhamos que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes e que $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Então pelo menos um deles é combinação linear dos outros. Ou seja, existe v_k tal que $v_k \in \langle v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\rangle$. Se $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n$ não forem linearmente independentes, então repetimos o processo até obtermos $B \subsetneq A$ linearmente independente. Vamos mostrar que $\langle B\rangle = \langle A\rangle$, recordando que $\langle A\rangle = V$. Seja $C = A \setminus B$; isto é, C é o conjunto dos elementos que se retiraram a A de forma a obter o conjunto linearmente independente B. Portanto,

$$v_i \in C \Rightarrow v_i = \sum_{v_j\in B} \beta_{ij} v_j.$$

Seja então $v \in V = \langle A\rangle$. Ou seja, existem α_i's para os quais

$$\begin{aligned} v &= \sum_{v_i\in A} \alpha_i v_i \\ &= \sum_{v_i\in B} \alpha_i v_i + \sum_{v_i\in C} \alpha_i v_i \\ &= \sum_{v_i\in B} \alpha_i v_i + \sum_{i} \alpha_i \sum_{v_j\in B} \beta_{ij} v_j \\ &= \sum_{v_i\in B} \alpha_i v_i + \sum_{i} \sum_{v_j\in B} \alpha_i \beta_{ij} v_j \in \langle B\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, B é uma base de V com $m < n$ elementos, o que é absurdo. □

Corolário 4.3.8. *Sejam V um espaço vectorial e W_1, W_2 subespaços vectoriais de V. Se $W_1 \subseteq W_2$ e $\dim W_1 = \dim W_2$ então $W_1 = W_2$*

Demonstração. Se $W_1 \subseteq W_2$ e ambos são subespaços de V então W_1 é subespaço de W_2. Seja $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_r\}$ uma base de W_1, com $r = \dim W_1$. Segue que $\mathcal{B}$ é linearmente independente em W_2. Como $r = \dim W_1 = \dim W_2$, temos um conjunto linearmente inpedente com r elementos. Por (1) do teorema, $\mathcal{B}$ é base de W_2, o portanto $W_1 = \langle \mathcal{B}\rangle = W_2$. □

Corolário 4.3.9. *Seja V um espaço vectorial e A um conjunto tal que $\langle A\rangle = V$. Então existe $B \subseteq A$ tal que B é base de V.*

Demonstração. A demonstração segue o mesmo raciocínio da demonstração de (2) do teorema anterior. □

4.4 $\mathbb{R}^n$ e seus subespaços (vectoriais)

Nesta secção[3], debruçamo-nos sobre $\mathbb{R}^n$ enquanto espaço vectorial real. Repare que as colunas de I_n formam uma base de $\mathbb{R}^n$, pelo que $\dim \mathbb{R}^n = n$. Mostre-se que de facto geram $\mathbb{R}^n$. Se se denotar por e_i a coluna i de I_n, é imediato verificar que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Por outro lado, $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$ implica $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, e portanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. O conjunto $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ é chamado *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

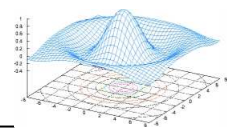
Teorema 4.4.1. *Se A é uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, o núcleo $N(A)$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Basta mostrar que, dados elementos x, y de $\mathbb{R}^n$ tais que $Ax = Ay = 0$, também se tem $A(x + y) = 0$ e $A(\lambda x) = 0$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Note-se que $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, e que $A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0$. □

Considere, a título de exemplo, o conjunto

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x - 3y\right\} = \{(x, y, 2x - 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Este conjunto é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. De facto, escrevendo a condição $z = 2x - 3y$ como $2x - 3y - z = 0$, o conjunto V iguala o núcleo da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, pelo que V é um subespaço de $\mathbb{R}^3$



Octave

Vamos agora usar o octave para esboçar o conjunto V definido acima. Vamos considerar $x, y \in [-2; 2]$ e tentar que o octave encontre os pontos $(x, y, 2x - 3y) \in \mathbb{R}^3$. Como é óbvio, x, y não poderão percorrer *todos* os elementos do intervalo $[-2; 2]$. Vamos, em primeiro lugar, definir os vectores `x,y` com os racionais de -2 a 2 com intervalo de 0.1 entre si. Não se esqueça de colocar ; no fim da instrução, caso contrário será mostrado o conteúdo desses vectores (algo desnecessário). Com o comando `meshgrid` pretende-se construir uma matriz quadrada onde `x,y` surgem copiados. Finalmente, define-se `Z=2*X-3*Y` e solicita-se a representação gráfica. Para obter a representação gráfica precisa de ter o `gnuplot` instalado.

```
> x=[-2,0.1,2];
```

[3] De facto, o que é afirmado pode ser facilmente considerado em $\mathbb{C}^n$.

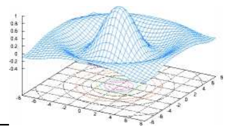
```
> y=[-2,0.1,2];
> [X,Y]=meshgrid (x,y);
> Z=2*X-3*Y;
> surf(X,Y,Z)
```

Verifique se a sua versão do `gnuplot` permite que rode a figura. Clique no botão esquerdo do rato e arraste a figura. Para sair do gnuplot, digite q.

Como é óbvio, o uso das capacidades gráficas ultrapassa em muito a representação de planos. O seguinte exemplo surge na documentação do octave:

```
tx = ty = linspace (-8, 8, 41)';
[xx, yy] = meshgrid (tx, ty);
r = sqrt (xx .^ 2 + yy .^ 2) + eps;
tz = sin (r) ./ r;
mesh (tx, ty, tz);
```

O conjunto $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + \frac{1}{2}z = 0 = -x + y + 2z\right\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, já que $U = N\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$. O subespaço U é dado pela intersecção do plano dado pela equação $x - 2y + \frac{1}{2}z = 0$ com o plano dado pela equação $-x + y + 2z = 0$.



Octave

Para obtermos a representação gráfica dos dois planos, vamos fazer variar x, y de -3 a 3, com intervalos de 0.1. O comando `hold on` permite representar várias superfícies no mesmo gráfico.

```
> x=[-3:0.1:3];
> y=x;
> [X,Y]=meshgrid (x,y);
> Z1=-2*X+4*Y;
> Z2=1/2*X-1/2*Y;
> surf(X,Y,Z1)
> hold on
> surf(X,Y,Z2)
```

Em vez de `x=[-3:0.1:3];` poderíamos ter usado o comando `linspace`. No caso, `x=linspace(-3,3,60)`. A sintaxe é `linspace(ponto_inicial,ponto_final,numero_de_divisoes)`.

Vejamos como poderemos representar a recta U que é a intersecção dos dois planos referidos atrás. Repare que os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ da recta são exactamente aqueles que satisfazem as duas equações, ou seja, aqueles que são solução do sistema homogéneo $A[x\,y\,z]^T = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

```
 > A=[1 -2 1/2; -1 1 2]
A =

   1.00000  -2.00000   0.50000
  -1.00000   1.00000   2.00000

> rref (A)
ans =

   1.00000   0.00000  -4.50000
   0.00000   1.00000  -2.50000

> solucao=[-(rref (A)(:,3));1]
solucao =

  4.5000
  2.5000
  1.0000
```

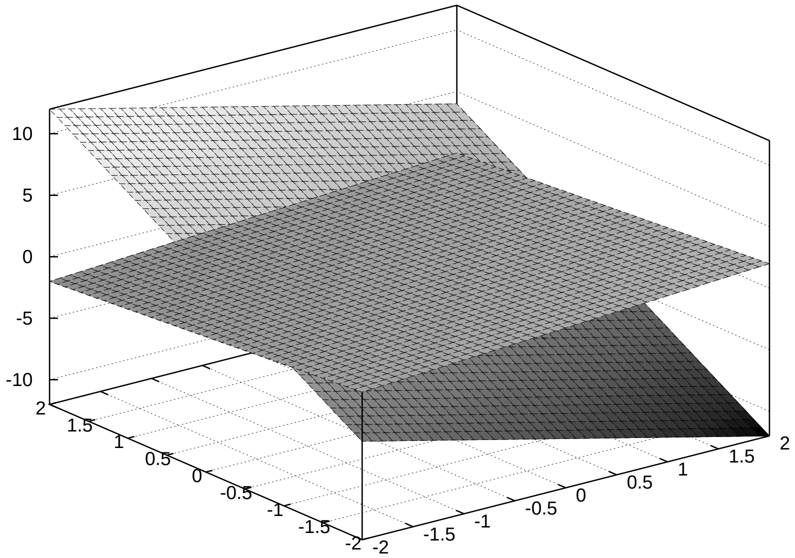
De facto, o comando `rref (A)` diz-nos que $y - \frac{5}{2}z = 0 = x - \frac{9}{2}z$, ou seja, que as soluções do homogéneo são da forma $(\frac{9}{2}z, \frac{5}{2}z, z) = z(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 1)$, com $z \in \mathbb{R}$. Ou seja, as soluções de $A[x\,y\,z]^T = 0$ são `todos` os múltiplos do vector `solucao`. Outra alternativa seria a utilização do comando `null(A)`.

```
> t=[-3:0.1:3];
> plot3 (solucao(1,1)*t, solucao(2,1)*t,solucao(3,1)*t);
```

O *gnuplot* não permite a gravação de imagens à custa do teclado ou do rato. Podemos, no entanto, imprimir a figura para um ficheiro.

```
> print('grafico.eps','-deps')
> print('grafico.png','-dpng')
```

No primeiro caso obtemos um ficheiro em formato *eps* (encapsulated postscript), e no segundo em formato PNG. A representação dos dois planos será algo como a figura seguinte:



Como é óbvio, não estamos condicionados a $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, o conjunto

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_3 = 0 = x_1 - x_2 + 4x_4\right\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^4$. De facto, repare que $W = N\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$.

Teorema 4.4.2. *Sejam $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}_{m\times n}$ (as colunas de A são os vectores $v_i \in \mathbb{R}^m$). Então $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente se e só se $car(A) = n$.*

Demonstração. Consideremos a equação $Ax = 0$, com $x = [x_1\, x_2\, \cdots\, x_n]^T$. Ou seja, consideremos a equação

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0.$$

Equivalentemente,

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0.$$

Ou seja, a independência linear de $v_1, \ldots, v_n$ é equivalente a $N(A) = \{0\}$ (isto é, 0 ser a única solução de $Ax = 0$). Recorde que $Ax = 0$ é possível determinado se e só se $car(A) = n$. $\square$

Octave

Com base no teorema anterior, vamos mostrar que

```
> u=[1; 2; 3; 3]; v=[2; 0; 1; -1]; w=[0; 0; -1; -3];
```

são linearmente independentes. Tal é equivalente a mostrar que car $\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} = 3$:

```
> rank([u v w])
ans = 3
```

Para $y = (1, -6, -7, -11)$, os vectores u, v, y não são linearmente independentes:

```
> rank([u v y])
ans = 2
```

Teorema 4.4.3. *Dados $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, seja A a matriz $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ cujas colunas são $v_1, \ldots, v_m$. Então $w \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ se e só se $Ax = w$ tem solução.*

Demonstração. Escrevendo $Ax = w$ como

$$[v_1 \ \ldots \ v_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = w,$$

temos que $Ax = w$ tem solução se e só se existirem $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_m v_m = w,$$

isto é, $w \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. $\square$

Definição 4.4.4. *Ao subespaço $CS(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ de $\mathbb{R}^m$ chamamos* imagem *de A, ou* espaço das colunas *de A. Por vezes, $CS(A)$ é denotado também por $R(A)$ e por $Im(A)$. O espaço das colunas da A^T designa-se por* espaço das linhas *de A e denota-se por $RS(A)$.*

Octave

Considerando u, v, w, y como no exemplo anterior, vamos verificar se $y \in \langle u, v, w \rangle$. Para $A = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$, tal é equivalente a verificar se $Ax = y$ tem solução.

```
> u=[1; 2; 3; 3]; v=[2; 0; 1; -1]; w=[0; 0; -1; -3];
octave:23> A=[u v w]
A =

   1   2   0
   2   0   0
   3   1  -1
   3  -1  -3
```

Ou seja, se $\text{car}A = \text{car}\left(\left[\begin{array}{c|c} A & y \end{array}\right]\right)$.

```
> rank(A)
ans = 3
> rank([A y])
ans = 3
```

De uma forma mais simples,

```
> rank(A)==rank([A y ])
ans = 1
```

Já o vector $(0,0,0,1)$ não é combinação linear de u, v, w, ou seja, $(0,0,0,1) \notin \langle u, v, w \rangle$. De facto, $\text{car}A \neq \text{car}\left(\left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ A & 0 \\ & 1 \end{array}\right]\right)$:

```
> rank([A [0;0;0;1]])
ans = 4
```

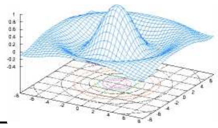
Vejamos qual a razão de se denominar "espaço das colunas de A" a $CS(A)$. Escrevendo $A = \left[\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array}\right]$ através das colunas de A, pela forma como o produto de matrizes foi definido, obtemos

$$A \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array}\right] = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

O teorema anterior afirma que $b \in CS(A)$ (i.e., $Ax = b$ é possível) se e só se b for um elemento do espaço *gerado* pelas colunas de A.

A classificação de sistemas de equações lineares como impossível, possível determinado ou possível indeterminado, ganha agora uma nova perspectiva geométrica.

Por exemplo, consideremos a equação matricial $A[x\,y\,z]^T = b$, com $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$. O sistema é possível, já que $car(A) = car([A\,b])$, mas é indeterminado pois $car(A) < 3$.

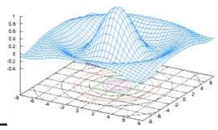


Octave

Depois de definirmos A e b no octave,

```
> rank(A)
ans =  2
> rank([A b])
ans =  2
```

As colunas de A, que geram $CS(A)$, não são linearmente independentes. Como $Ax = b$ é possível temos que $b \in CS(A)$, mas não sendo as colunas linearmente independentes, b não se escreverá de forma única como combinação linear das colunas de A. O sistema de equações tem como soluções as realizações *simultâneas* das equações $2x+4y-8z = 14$, $x+2y-4z = 7$ e $2x+3y+5z = 10$. Cada uma destas equações representa um plano de $\mathbb{R}^3$, e portanto as soluções de $Ax = b$ são exactamente os pontos de $\mathbb{R}^3$ que estão na intersecção destes planos.



Octave

Vamos representar graficamente cada um destes planos para obtermos uma imagem do que será a intersecção.

```
> x=-3:0.5:3;
> y=x;
> [X,Y]=meshgrid(x,y);
> Z1=(14-2*X-4*Y)/(-8);
> surf(X,Y,Z1)
> Z2=(7-X-2*Y)/(-4);
> Z3=(10-2*X-3*Y)/(5);
> hold on
> surf(X,Y,Z2)
> surf(X,Y,Z3)
```

A intersecção é uma recta de $\mathbb{R}^3$, e portanto temos uma infinidade de soluções da equação $Ax = b$.

No entanto, o sistema $Ax = c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ é impossível, já que $car(A) = 2 \neq 3 = car([A\,c])$. A intersecção dos planos dados pelas equações do sistema é vazia.

Considere agora $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. O facto de $Ax = b$ ser impossível (compare a característica de A com a de $[A\,b]$) significa que $b \notin CS(A)$. Ora $CS(A) = \langle (1,1,-1),(1,0,1) \rangle$, ou seja, $CS(A)$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que se escrevem da forma

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,-1) + \beta(1,0,1) = (\alpha+\beta, \alpha, -\alpha+\beta),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Octave

```
> alfa=-3:0.5:3; beta=a;
> [ALFA,BETA]=meshgrid(alfa,beta);
> surf(ALFA+BETA,ALFA,-ALFA+BETA)
```

Com alguns cálculos, podemos encontrar a equação que define $CS(A)$. Recorde que se pretende encontrar os elementos $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ para os quais existem $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Usando o método que foi descrito na parte sobre resolução de sistemas lineares,

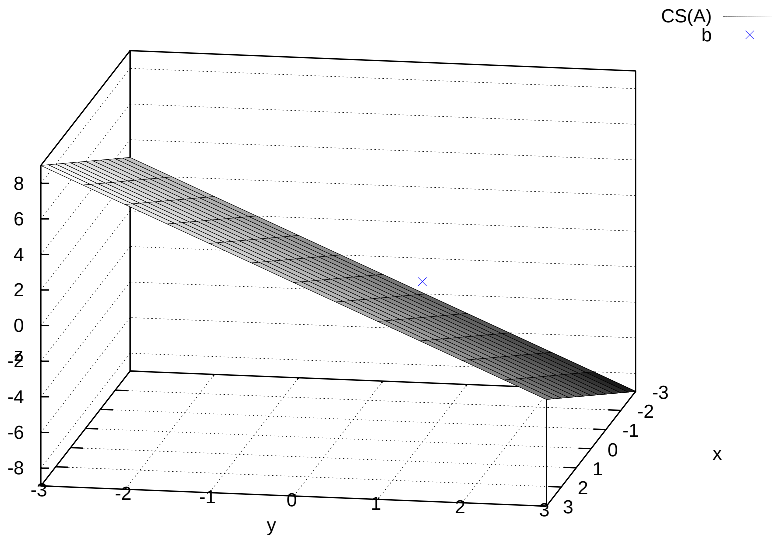
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ -1 & 1 & z \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & z-x+2y \end{array}\right].$$

Como o sistema tem que ter soluções α,β, somos forçados a ter $z = x - 2y$.

Octave

```
> x=-3:0.5:3; y=x;
> [X,Y]=meshgrid(x,y);
> surf(X,Y,-2*Y+X); hold on;  plot3([0],[1],[0],'x')
```

Ora $Ax = b$ é impossível, pelo que $b \notin CS(A)$. Ou seja, b não é um ponto do plano gerado pelas colunas de A.



Se A for invertível, então $CS(A) = \mathbb{R}^n$ (neste caso, tem-se necessariamente $m = n$). De facto, para $x \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever $x = A(A^{-1}x)$, pelo que, tomando $y = A^{-1}x \in \mathbb{R}^n$, temos $x = Ay \in CS(A)$. Portanto,

$$\mathbb{R}^n \subseteq CS(A) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Se A, B são matrizes reais para as quais AB existe, temos a inclusão $CS(AB) \subseteq CS(A)$. De facto, se $b \in CS(AB)$ então $ABx = b$, para algum x. Ou seja, $A(Bx) = b$, pelo que $b \in CS(A)$.

Se B for invertível, então $CS(AB) = CS(A)$. Esta igualdade fica provada se se mostrar que $CS(A) \subseteq CS(AB)$. Para $b \in CS(A)$, existe x tal que $b = Ax = A(BB^{-1})x = (AB)B^{-1}x$, e portanto $b \in CS(AB)$.

Recordemos, ainda, que para A matriz real $m \times n$, existem matrizes P, L, U permutação, triangular inferior com 1's na diagonal (e logo invertível) e escada, respectivamente, tais que

$$PA = LU.$$

Ou seja,

$$A = P^{-1}LU.$$

Finalmente, e a comprovação deste facto fica ao cargo do leitor, as linhas não nulas de U, matriz obtida de A por aplicação do método de eliminação de Gauss, são *linearmente independentes*.

Para A, P, L, U definidas atrás,

$$RS(A) = CS(A^T) = CS(U^T(P^{-1}L)^T) = CS(U^T) = RS(U).$$

Ou seja, o espaço das linhas de A e o das linhas de U são o mesmo, e uma base de $RS(A)$ são as linhas não nulas de U enquanto elementos de $\mathbb{R}^n$. Temos, então,

$$RS(A) = RS(U) \text{ e } \dim RS(A) = car(A)$$

Seja QA a forma normal de Hermite de A. Portanto, existe uma matriz permutação P_{erm} tal que $QAP_{\text{erm}} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & M \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, onde $r = \text{car}(A)$. Repare que $CS(QA) = CS(QAP_{\text{erm}})$, já que o conjunto gerador é o mesmo (ou ainda, porque P_{erm} é invertível). As primeiras r colunas de I_m formam uma base de $CS(QAP_{\text{erm}}) = CS(QA)$, e portanto $\dim CS(QA) = r$. Pretendemos mostrar que $\dim CS(A) = \text{car}(A) = r$. Para tal, considere o lema que se segue:

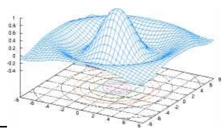
Lema 4.4.5. *Seja Q uma matriz $n \times n$ invertível e $v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$. Então $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ é linearmente independente se e só se $\{Qv_1, Qv_2, \ldots, Qv_r\}$ é linearmente independente.*

Demonstração. Repare que $\sum_{i=1}^r \alpha_i Q v_i = 0 \Leftrightarrow Q\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = 0.$ □

Usando o lema anterior,

$$\dim CS(A) = \dim CS(QA) = r = \text{car}(A).$$

Sendo U a matriz escada de linhas obtida por Gauss, U é equivalente por linhas a A, e portanto $\dim CS(U) = \dim CS(A) = \text{car}(A)$.



Octave

Considere os vectores de $\mathbb{R}^3$

```
> u=[1; 0; -2]; v=[2; -2; 0]; w=[-1; 3; -1];
```

Estes formam uma base de $\mathbb{R}^3$, já que $CS(\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}) = \mathbb{R}^3$. Esta igualdade é válida já que $CS(\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\text{car}(\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}) = \dim CS(\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}) = 3$:

```
> A=[u v w]
A =

   1   2  -1
```

```
   0  -2   3
  -2   0  -1

> rank(A)
ans = 3
```

Já os vectores u, v, q, com $q = (-5, 6, -2)$ não são uma base de $\mathbb{R}^3$. De facto,

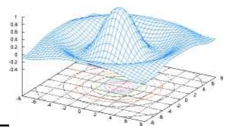
```
 A=[u v q]
A =

   1   2  -5
   0  -2   6
  -2   0  -2

> rank(A)
ans = 2
```

e portanto $\dim CS(\begin{bmatrix} u & v & q \end{bmatrix}) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. As colunas da matriz não são linearmente independentes, e portanto não são uma base do espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} u & v & q \end{bmatrix}$.

A questão que se coloca aqui é: **como obter uma base para** $CS(A)$?



Octave

Suponha que V é a matriz escada de linhas obtida da matriz A^T. Recorde que $RS(A^T) = RS(V)$, e portanto $CS(A) = CS(V^T)$. Portanto, e considerando a matriz `A=[u v q]` do exemplo anterior, basta-nos calcular a matriz escada de linhas associada a A^T:

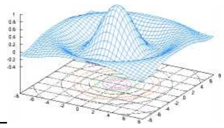
```
> [l,V,p]=lu(A'); V'
ans =

  -5.00000   0.00000   0.00000
   6.00000   1.20000   0.00000
  -2.00000  -2.40000   0.00000
```

As duas primeiras colunas de `V'` formam uma base de $CS(A)$.

Em primeiro lugar, verifica-se que as r colunas de U com pivot, digamos $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r}$ são linearmente independentes pois $\begin{bmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \ldots & u_{i_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$ é possível determinado.

Em segundo lugar, vamos mostrar que as colunas de A correpondentes às colunas de U com pivot são também elas linearmente independentes. Para tal, alertamos para a igualdade $U \begin{bmatrix} e_{i_1} & \ldots & e_{i_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \ldots & u_{i_r} \end{bmatrix}$, onde e_{i_j} indica a i_j-ésima coluna de I_n. Tendo $U = L^{-1}PA$, e como $\begin{bmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \ldots & u_{i_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$ é possível determinado, segue que, pela invertibilidade de $L^{-1}P$, a equação $A \begin{bmatrix} e_{i_1} & \ldots & e_{i_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$ admite apenas a solução nula. Mas $A \begin{bmatrix} e_{i_1} & \ldots & e_{i_r} \end{bmatrix}$ é a matriz constituída pelas colunas $i_1, i_2, \ldots, i_r$ de A, pelo que estas são linearmente independentes, em número igual a $r = \mathrm{car}(A)$. Visto $\dim CS(A) = r$, essas colunas constituem de facto uma base de $CS(A)$.



Octave

Seja `A` a matriz do exemplo anterior:

```
> A
A =

   1   2  -5
   0  -2   6
  -2   0  -2
```

Vamos agora descrever esta segunda forma de encontrar uma base de $CS(A)$. Como já vimos, $\mathrm{car} A = 2$, pelo que as colunas de A não formam uma base de $CS(A)$ pois não são linearmente independentes, e $\dim CS(A) = 2$. Façamos a decomposição $PA = LU$:

```
> [l,u,p]=lu(A); u
u =

  -2   0  -2
   0  -2   6
   0   0   0
```

Uma base possível para $CS(A)$ são as colunas de A correspondendo às colunas de u que têm pivot. No caso, a primeira e a segunda colunas de A formam uma base de $CS(A)$. ________

Finalmente, como $car(A^T) = \dim CS(A^T) = \dim RS(A) = car(A)$, temos a igualdade

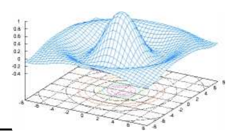
$$car(A) = car(A^T).$$

Repare que $N(A) = N(U)$ já que $Ax = 0$ se e só se $Ux = 0$. Na resolução de $Ux = 0$, é feita a separação das incógnitas em básicas e em livres. Recorde que o número destas últimas é denotado por $\mathrm{nul}(A)$. Na apresentação da solução de $Ax = 0$, obtemos, pelo algoritmo para a resolução da equação somas de vectores, cada um multiplicado por uma das incógnitas livres. Esses vectores são geradores de $N(A)$, e são em número igual a $n-r$, onde $r = \mathrm{car}(A)$. Queremos mostrar que $\mathrm{nul}(A) = \dim N(A)$. Seja QA a forma normal de Hermite de A; existe P permutação tal que $QAP = \left[\begin{array}{c|c} I_r & M \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = H_A$, tendo em mente que $r \leq m, n$. Como Q é invertível, segue que $N(QA) = N(A)$. Sendo H_A a matriz obtida de QA fazendo trocas convenientes de colunas, tem-se $\mathrm{nul}(H_A) = \mathrm{nul}(QA) = \mathrm{nul}(A)$. Definamos a matriz quadrada, de ordem n, $G_A = \left[\begin{array}{c|c} I_r & M \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. Como $H_A G_A = H_A$ segue que $H_A(I_n - G) = 0$, e portanto as colunas de $I_n - G$ pertencem a $N(H_A)$. Mas $I_n - G = \left[\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right]$ e as suas últimas $n-r$ colunas são linearmente independentes (já que $\mathrm{car}\left(\begin{bmatrix} M \\ I_{n-r} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{car}\left(\begin{bmatrix} I_{n-r} \\ M \end{bmatrix}\right) = \mathrm{car}\left(\begin{bmatrix} I_{n-r} \\ M \end{bmatrix}^T\right) = n-r$). Logo, $\dim N(A) = \dim N(H_A) \geq n-r$. Pelo que vimos atrás, $\dim N(A) = \dim N(U) \leq n-r$. Segue das duas desigualdades que

$$\mathrm{nul}(A) = \dim N(A).$$

Como $n = \mathrm{car}(A) + \mathrm{nul}(A)$, obtemos, finalmente,

$$n = \dim CS(A) + \dim N(A).$$



Octave ________

Vamos aplicar os resultados desta secção num caso concreto. Considere o subespaço W de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1,2,1), (2,-3,-1), (3,1,2), (4,1,2), (5,0,4)$. Como temos 5 vectores de um espaço de dimensão 3, eles são necessariamente linearmente dependentes. Qual a dimensão de W? W é o espaço das colunas da matriz A, cujas colunas são os vectores dados:

```
> A=[1 2 3 4 5; 2 -3 1 1 0; 1 -1 2 2 4];
```

Ora $\dim CS(A) = \mathrm{car}(A)$.

```
> [L,U,P]=lu(A); U
U =

   2.00000  -3.00000   1.00000   1.00000   0.00000
   0.00000   3.50000   2.50000   3.50000   5.00000
   0.00000   0.00000   1.14286   1.00000   3.2857
```

Ou seja, $\dim W = 3$. Como $W \subseteq \mathbb{R}^3$ e têm a mesma dimensão, então $W = \mathbb{R}^3$. Ou seja, as colunas de A geram $\mathbb{R}^3$. As colunas de A que formam uma base para W são aquelas correspondentes às colunas de U que têm pivot; neste caso, as três primeiras de U. Uma base $\mathcal{B}$ para W é o conjunto formado pelos vectores $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, -3, -1), v_3 = (3, 1, 2)$. Vamos agora calcular as coordenadas de `b=[0; -2; -2]` nesta base. Tal corresponde a resolver a equação $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} x = b$:

```
 > b=[0; -2; -2]
b =

   0
  -2
  -2

> B=A(:,[1,2,3])
B =

   1   2   3
   2  -3   1
   1  -1   2

> coord=inverse(B)*b
coord =

   1.00000
   1.00000
  -1.00000
```

Ou seja, $(0, -2, -2)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.